المملكـة العربيــة السـعودية

المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

قررت المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني تدريس هذه الحقيبة في " المعاهد الثانوية الفنية "

قسم المساحة

رياضيات

الصف الثاني

نسخة أولية 1425هـ

تمهيد

الحمد للّه رب العالمين ،والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين وبعد :

أخي الطالب الكريم : إن علم الرياضيات يهتم بدراسة الظواهر الطبيعية وبخصائص المادة في ضوء مبادئ وقوانين أساسية.

وهذا الكتاب الذي بين يديك هو عوناً لك على تفهم بعض الظواهر التي تعايشها لتستشعر بذلك عظمة اللّه الخالق عز وجل في إبداعه ودقة خلقه ، هذا بالإضافة إلى أن علم الرياضيات يعد ركناً أساسياً لدراسة العلوم التطبيقية والتقنية التي سخّرت بدورها تلك المفاهيم والمبادئ الأساسية في إنتاج العديد من الأجهزة والآلات المختلفة التي لا غنى عنها اليوم.

لقد روعي في وضع مادة هذا الكتاب أن يكون مختصراً مناسباً لجميع أقسام المعهد الثانوي للمراقبين والصناعي ، وأن يكون مبسطاً بالقدر الذي يسهل عملية الاستيعاب.

وغاية ما أرجوه من جهدي هذا أن يكون لبنة في بناء جيل مزود بذخيرة علمية تكون نواة صالحة للنهوض بمجتمعنا إلى أعلى المستويات ، وأن يجد أبناؤنا الطلبة كل فائدة فيه وأن يتقبله زملائي الأساتذة بحسن الرضى والارتياح وأن يدلوا بدلوهم بملاحظة هادفة أو نقد بناء لتفادي الهفوات وسد الثغرات وإتمام النواقص التي تظهر في المستقبل إن شاء اللّه.

سدد اللّه على دروب الخير خطانا ، واللّه الموفق.

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات

حساب التفاضل

حساب التفاضل

1

الجدارة :

أن يكون قادراً على ايجاد المشتقة الأولى والثانية والإلمام بقاعدة التسلسل.

الأهداف :

عندما تكمل هذه الوحدة تكون قادراً على:

1. ايجاد معدل تغير الدالة.
2. ايجاد المشتقه الأولى للدالة.
3. معرفة قواعد الإشتقاق.
4. معرفة قاعدة التسلسل.

مستوى الأداء المطلوب :

إن يصل المتدرب إلى الإتقان الكامل لقواعد الاشتقاق وايجاد معدل تغير الدالة بنسبة 100٪ وأن لا تقل نسبة معرفته لقاعدة التسلسل عن 90٪.

الوقت المتوقع للتدريب :

6 ساعات

الوسائل المساعدة:

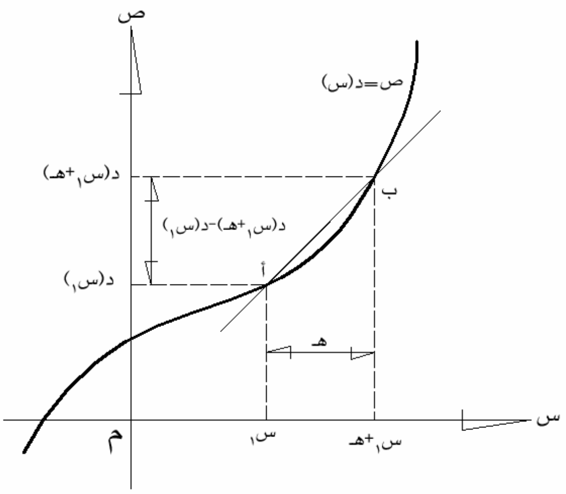
استخدام التعليمات في هذه الوحدة.

متطلبات الجدارة:

طالما انه لا يوجد شئ قبل هذه الوحدة يجب التدرب على جميع المهارات فيها

حساب التفاضل

1-1 معدل تغير الدالة :



لتكن لدينا الدالة ص= د(س)حيث د دالة حقيقية متصلة في المتغير الحقيقي س، أي أنها معرفة على مجموعة جزئية من ح.

عندما يتغير س من س$_1$ إلى س$_1$+هـ فإن ص تتغير من د(س$_1$) إلى د(س$_1$+هـ) أي أن التغير هـ في س يقابله التغير د(س$_1$+هـ) - د(س$_1$) في ص

يسمى المقدار :

$$\frac{\text{د(س}_1\text{+هـ)} - \text{د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$$ حيث هـ K صفر

بمعدل التغير أو بمتوسط التغير في الدالة ص=د(س) على الفترة من س$_1$ إلى س$_1$+هـ

لاحظ أن : $\frac{\text{د(س}_1\text{+هـ)} - \text{د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ هو ميل المستقيم ل الذي يمر بالنقطتين

أ =(س$_1$، د(س$_1$)) ب=(س$_1$+هـ، د(س$_1$+هـ))

ولذلك سنستخدم الرمز م للدلالة على معدل التغير $\boxed{\text{م} = \frac{\text{د(س}_1\text{+هـ)} - \text{د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}}$

مثال(1):أوجد متوسط تغير ص على الفترة من س=2 إلى س=2.2 حيث ص=3س^2 -س^3

الحل:

$$\text{م} = \frac{\text{د(س}_1\text{+هـ)-د(س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$$

حيث $س_1=2$ ، هـ=2.2-2=0.2

$د(س_1)$	=	$3س_1^2-س_1^3$	=	$3(2)^2-(2)^3$	=	$12-8$	=	4
$د(س_1+هـ)$	=	$3(2.2)^2-(2.2)^3$	=	$3(2.2)^2-(2.2)$	=	3.872		
م	=	$\frac{3.872-4}{0.2}$	=	$\frac{-0.128}{0.2}$	=	-0.64		

مثال(2):تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين احسب متوسط التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من 6سم إلى 6.1سم (إرشاد :مساحة الدائرة= ط $نق^2$)

الحل:

نفرض أن طول نصف القطر =نق

مساحة الصفيحة =ط $نق^2$ =د(نق)

$$م = \frac{د(6.1)-د(6)}{6.1-6}$$

$$= \frac{ط(6.1)^2-ط(6)^2}{0.1}$$

$$= \frac{ط(6.1-6)(6.1+6)}{0.1}$$

$$= ط(6.1+6)$$

$$= 12.1ط$$

$$\approx 38$$

تدريب (1):

أ - أوجد معدل تغير الدالة د(س)=$س^2$+3 عندما تتغير س من 3 إلى 3.1.

ب -فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي ،أحسب متوسط التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما يتغير طول نصف قطرها من 6 ملم إلى 6.2 ملم ، علماً بأن مساحة سطح الكرة هو 4ط $نق^2$

تمارين (1 -1):

في التمارين من (1)إلى (5) أوجد متوسط التغير لكل من الدوال المذكورة.

(1)	د(س)	=	8 - 5س	عندما تتغير	س	من	3	إلى	3.4
(2)	د(س)	=	2س-1	س = 3 ، هـ= 0.4					
(3)	د(س)	=	$\sqrt{\text{س} - 2}$	عندما تتغير	س	من	3	إلى	3.21
(4)	ص	=	س^3	عندما تتغير	س	من	-2	إلى	2
(5)	د(ن)	=	(ن+2)^2	عندما تتغير	ن	من	2	إلى	1.2

(6) وعاء اسطواني الشكل طول نصف قطر قاعدته 7سم ، فيه ماء ،فإذا برد الماء بحيث تغير ارتفاعه في الوعاء من 12 سم إلى 10 سم فأوجد متوسط التغير في حجم الماء.

(7)صفيحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها ، أحسب متوسط التغير في مساحة الصفيحة إذا تغير طول ضلعها من 8 سم إلى 8.4 سم .

إرشاد :	مساحة المثلث المتطابق الأضلاع =	$\frac{3}{4}$	ل (حيث ل هو طول الضلع)

(1 -2): المشتقه الأولى للدالة وقواعد الأشتقاق.

تعريف : إذا كانت النهاية $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نـهـا}} \frac{\text{د(س}_1\text{+هـ)} - \text{د(س}_1)}{\text{هـ}}$ موجودة

فإنها تسمى مشتقة الدالة د(س)عند س$_1$ ويرمز للمشتقة بالرمز دَ(س$_1$)

ويمكن أن يرمز للمشتقه الأولى بأحد الرموز التالية:

دَ(س)، صَ	،	$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$	،	$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$

مثال (3):إذا كانت د(س)= س^2- س+3 لكل س ∈ ح فأوجد دَ(س)ثم أحسب دَ(3)

الحل:

د(س+هـ) - د(س)	=	(س+هـ)^2 -	(س+هـ)+3	-(س^2 - س+3)
	=	س^2+2س هـ+هـ^2	-س-هـ+3	-س^2+س-3
	=	2س هـ+هـ^2-هـ		

$\therefore$ دَ(س) = $\underset{هـ \to 0}{\text{نـــــها}} \dfrac{2س\,هـ + هـ^2 - هـ}{هـ}$

= $\underset{هـ \to 0}{\text{نـــــها}}$ (2س + هـ - 1)

= 2س - 1

ومنه دَ(3) = 2(3)-1

= 6 - 1

= 5

قواعد الإشتقاق:

نظرية(1): (مشتقه الدالة الثابتة):
إذا كان د(س)=جـ حيث جـ عدد ثابت فإن : دَ(س)= 0

مثال(4):

أوجد مشتقه الدالة الآتية : د(س)=4

الحل :

دَ(س)=صفر

نظرية(2) (مشتقه الدالة الخطية):
إذا كانت د(س)=أس+ب حيث أ ، ب ثابتان فإنه دَ(س)=أ

مثال(5):

أوجد مشتقه الدوال التالية:	أ) د(س)=4س+3	ب) د (س)=3 - $\frac{1}{2}$ س

الحل:

أ)	دَ(س)	=	4
ب)	دَ(س)	= -	$\frac{1}{2}$

نظرية (3)(مشتقه القوى)
إذا كانت د(س) = $س^{ن}$　　فإن دَ(س) = ن $س^{ن-1}$　　لكل ن ∈ ح

مثال(6):

أوجد مشتقه الدوال الآتية:

أ)	دَ(س)= $س^{4}$	ب)	دَ(س)= $س^{-3}$	جـ)	دَ(س)= $س^{\frac{1}{2}}$	د)	دَ(س)= $\sqrt[4]{س^{7}}$

الحل:

أ)	دَ(س)	=	$4س^{3}$	
ب)	دَ(س)	=	$-3س^{-4} =$	$\frac{-3}{س^{4}}$
ج)	دَ(س)	=	$\frac{1}{2}$	$س^{-\frac{1}{2}}$
		=	$\frac{1}{2\ س}$	
د)	د(س)	=	$(س^{7})^{\frac{1}{4}}$	
		=	$س^{\frac{7}{4}}$	
		=	$\frac{7}{4}س^{-\frac{3}{4}} = \frac{7}{4\sqrt[4]{س^{3}}}$	

نتيجة:

إذا كانت د(س)= $أس^{ن}$　　فإن دَ(س)=أن $س^{ن-1}$　　حيث أ عدد ثابت　　ن عدد حقيقي

مثال(7):

أوجد مشتقه الدوال التالية:

أ)	د(س)=$3س^{2}$	ب)	د(س)=$\frac{3}{4}س^{4}$	جـ)	د(س)=$2س^{-3}$	د)	د(س)=$-5س^{-1}$

الحل:

أ)	دَ(س)	=	6س		
ب)	دَ(س)	=	$\frac{12}{4}\text{س}^{3}$	=	3س^{3}
ج)	دَ(س)	=	-6س^{-4}	=	$\frac{-6}{\text{س}^{4}}$
د)	دَ(س)	=	5س^{-2}	=	$\frac{5}{\text{س}^{2}}$

نظرية(4):

إذا كانت كل من الدالتين د ، **ر** قابلة للإشتقاق عن س فإن الداله د+ **ر** تكون قابلة للأشتقاق عند س ويكون:

$$\frac{\text{ى}}{\text{ىس}}[\text{د(س)}+\text{ر(س)}] = \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\text{د(س)} + \frac{\text{ى}}{\text{ىس}}\text{ر(س)}$$

مثال(8):

أوجد مشتقه الدوال الآتية:

أ)	$\text{د(س)}=\text{س}^{3}+\text{س}^{2}-3\text{س}+10$	ب)	$\text{د(س)}=3\text{س}^{3}-\frac{5}{2}\text{س}^{2}$	ج)	$\text{د(س)}=\text{س}^{3}+2\text{س}^{-5}$

الحل:

أ)	دَ(س)	=	3س^{2}	+	$2\text{س}-3$
ب)	د(س)	=	9س^{2}	-	5س
جـ)	د(س)	=	3س^{2}	-	10س^{-6}

مثال (9):

إذا كانت :

د(س)	=	$س^3+2س-3س^{-1}+8$	فأوجد دَ(2)

الحل:

دَ(س)	=	$3س^2$	+	2	+	$3س^{-2}$	
دَ(س)	=	$3س^2$	+	$\frac{3}{س^2}$	+	2	
دَ(2)	=	$3(2)^2$	+	$\frac{3}{(2)^2}$	+	2	
	=	12	+	$\frac{3}{4}$	+	2	
	=	14	+	$\frac{3}{4}$			
	=	$\frac{59}{4}$					

مثال(10):

إذا كانت:

د(س)	=	$س^3+6س^2-36س+4$	فأوجد مايلي:	

1) قيمة دَ(0) ، دَ(-1)

2) قيمة س التي تجعل : أ) دَ(س)= 0 ب) دَ(س)=60

الحل:

1)	دَ(س)	=	$3س^2$	+	12س	-	36	
	دَ(0)	=	$3(0)^2$	+	12(0)	-	36	
	دَ(0)	=	-36					
	دَ(-1)	=	$3(-1)^2$	+	12(-1)	-	36	
	دَ(-1)	=	3	-	12	-	36	
	دَ(-1)	=	-45					

2)	أ-	دَ(س)	=	0				
		3س^2	+	12س	-	36	=	0
		س^2	+	4س	-	12	=	0
				(س-2) (س+6)			=	0
				س=2	أو	س=-6		

	ب-	دَ(س)	=	60				
		3س^2	+	12س	-	36	=	60
		س^2	+	4س	-	12	=	20
		س^2	+	4س	-	32	=	0
				(س-4)(س+8)			=	0
				س=4	أو	س=- 8		

نظرية(5) مشتقه حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت كل من الدالتين د ، ر قابلة للإشتقاق عند س فإن داله حاصل الضرب د ر أيضاً قابلة للأشتقاق عند س ويكون:

$$\frac{ى}{ىس}[د(س).ر(س)] = د(س).رَ(س) + ر(س).دَ(س)$$

مشتقه حاصل ضرب دالتين = الأولى× مشتقه الثانية + الثانية × مشتقه الأولى

نظرية(6):

إذا كانت د(س)= $\frac{1}{ر(س)}$ حيث ر(س)≠0 ، رَ(س) لها وجود فإن دَ(س) ايضا لها وجود ويكون:

$$دَ(س) = -\frac{رَ(س)}{[ر(س)]^2}$$

مثال (11): أوجد مشتقة الدوال الآتية

أ) $\text{ص} = 2\text{س}^3(\text{س}+1)$

ب) $\text{ص} = (3\text{س}^5+7)(\text{س}+3)$

ج) $\text{ص} = (\text{س}+\frac{1}{\text{س}})(\text{س}^2-3)$ ، $\text{س} \neq 0$

د) $\text{ص} = (\frac{1}{4}\text{س}^4+2\text{س})(\text{س}^2+3\text{س}-5)$

هـ) $\text{ص} = \text{س}^3(2\text{س}^5-3\text{س}^2+\frac{2}{\text{س}^3})$ ، $\text{س} \neq 0$

الحل:

أ)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 2\text{س}^3 \times 1 + (\text{س}+1)\, 6\text{س}^2$$
$$= 2\text{س}^3 + 6\text{س}^3 + 6\text{س}^2$$
$$= 8\text{س}^3 + 6\text{س}^2$$

ب)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (3\text{س}^5+7) \times 1 + (\text{س}+3)(15\text{س}^4)$$
$$= 3\text{س}^5 + 7 + 15\text{س}^5 + 45\text{س}^4$$
$$= 18\text{س}^5 + 45\text{س}^4 + 7$$

ج)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\text{س}+\frac{1}{\text{س}})(2\text{س}) + (\text{س}^2-3)(1-\frac{1}{\text{س}^2})$$
$$= 2\text{س}^2 + \frac{2\text{س}}{\text{س}} + \text{س}^2 - \frac{\text{س}^2}{\text{س}^2} - 3 + \frac{3}{\text{س}^2}$$
$$= 3\text{س}^2 + 2-1 - 3 + \frac{3}{\text{س}^2}$$
$$= 3\text{س}^2 + \frac{3}{\text{س}^2} - 2$$

د)
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (\frac{1}{4}\text{س}^4+2\text{س})(2\text{س}+3) + (\text{س}^2+3\text{س}-5)(\text{س}^3+2)$$
$$= \frac{1}{2}\text{س}^5 + \frac{3}{4}\text{س}^4 + 4\text{س}^2 + 6\text{س} + \text{س}^5 + 2\text{س}^2 + 3\text{س}^4 + 6\text{س} - 5\text{س}^3 - 10$$
$$= \frac{3}{2}\text{س}^5 + \frac{15}{4}\text{س}^4 - 5\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 12\text{س} - 10$$

هـ)	$\frac{دص}{دس}$	$= س^3(10س^4-6س-\frac{3س^2}{س^6}) + (2س^5-3س^2+\frac{2}{س^3})(3س^2)$
		$= 10س^7-6س^4-\frac{3س^5}{س^6}+6س^7-9س^4+\frac{6}{س}$
		$= 16س^7-15س^4-\frac{3}{س}+\frac{6}{س}$
		$= 16س^7-15س^4+\frac{3}{س}$

نظرية(7):مشتقه حاصل قسمة دالتين :

إذا كانت كل من الدالتين د ، **ر** قابلة للإشتقاق عند س ، وإذا كانت **ر**(س) $\neq 0$ فإن الدالة $\frac{د}{ر}$ ايضاً قابلة للاشتقاق عند س ، ويكون:

$$\frac{د}{دس}\left[\frac{د(س)}{ر(س)}\right] = \frac{ر(س).د'(س) - د(س).ر'(س)}{[ر(س)]^2}$$

مشتقه خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام × مشتقه البسط — البسط × مشتقه المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مثال(12):

أوجد مشتقه الدوال الآتية:

أ)	ص	$= \frac{3س-2}{4س^2+5}$
ب)	ص	$= \frac{س^3+2س-6}{2س-3}$

الحل:

أ)	$\frac{دص}{دس}$	$= \frac{(4س^2+5)(3)-(3س-2)(8س)}{(4س^2+5)^2}$
		$= \frac{12س^2+15-(24س^2-16س)}{(4س^2+5)^2}$
		$= \frac{-12س^2+16س+15}{(4س^2+5)^2}$
ب)	$\frac{دص}{دس}$	$= \frac{(2س-3)(3س^2+2)-(س^3+2س-}{(2س-3)^2}$
		$= \frac{6س^3+4س-9س^2-6-2س^3-4س+12}{(2س-3)^2}$

$$= \frac{4\text{س}^3-9\text{س}^2+6}{(2\text{س}-3)^2}$$

مثال(13):

أوجد مشتقه الدالة الآتية مع بيان قيمة س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

$\text{د}(\text{س}) = \dfrac{3\text{س}^2+1}{\text{س}^2-4}$ ثم أوجد قيمة $\text{دَ}(-1)$ ، $\text{دَ}(2)$ إن أمكن.

$$\text{دَ}(\text{س}) = \frac{(\text{س}^2-4)(6\text{س}) - (3\text{س}^2+1)(2\text{س})}{(\text{س}^2-4)^2}$$

$$= \frac{6\text{س}^3-24\text{س}-6\text{س}^3-2\text{س}}{(\text{س}^2-4)^2}$$

$$= \frac{-26\text{س}}{(\text{س}^2-4)^2}$$

قيمة س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق هي :

$$\text{س}^2-4 = 0$$

$$\text{س}^2 = 4$$

$$\text{س} = \pm 2$$

* $\text{دَ}(-1) = \dfrac{-26(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \dfrac{26}{9}$

* $\text{دَ}(2) = \dfrac{-26(2)}{((2)^2-4)^2} = \dfrac{-52}{\text{صفر}}$ وهذا غير ممكن .

تدريب (2):أوجد مشتقه الدوال الآتية :

أ) د(س) = $\frac{(س^2)^-}{(3س+5)}$ $(س^{2}-3)$

ب) د(س) = $\frac{5}{س^2+9}$ ثم أوجد قيمة دَ(0)

جـ) د(س) = $\frac{س^2+2س-1}{(س+1)(س-1)}$ ، س K 1E

تمارين (1-2):

س[1] : أوجد مشتقة الدوال التالية :

أ)	د(س)	=	(2س+3)	$(\frac{1}{س^2}+\frac{1}{س})$	، سK0
ب)	د(س)	=	$\frac{-2}{س^2+3}$		
ج)	ص	=	$\frac{2س+1}{س+5}$		، سK-5

س[2] : أوجد مشتقه الدالة التالية مع بيان قيمة س التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق.

د(س)	=	$\frac{س(س^2+2)}{س^2-9}$	،ثم أوجد قيمة دَ(-3) ،دَ(-1) إن أمكن.

(1 -3)**قاعد التسلسل:**

نظرية(8):

إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س ، والدالة ر قابلة للإشتقاق عند ع=د(س)

فإن الدالة المحصلة ر 5 د قابلة للإشتقاق عند س ، ويكون

(ر 5 د)َ (س)=رَ(ع).دَ(س).

وإذا اعتبرنا ص دالة في المتغير س بحيث

ص	=	ر(د(س))
	=	ر(ع)
ع	=	د(س)

فإن المعادلة في نظرية (8) والتي تعرف بقاعدة التسلسل تأخذ الشكل:

$$\boxed{\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = \frac{\text{كص}}{\text{كع}} \cdot \frac{\text{كع}}{\text{كس}}} \quad *$$

مثال(14):إذا كانت ص=(س^{2}-1)^{6} فأوجد $\frac{\text{كص}}{\text{كس}}$

الحل:

باعتبار ص=ر(ع)=ع^{6} ، ع=د(س)=س^{2}-1

يتضح لنا أن ص=ر5د(س) فنطبق الصيغة(*) لقاعدة التسلسل:

$$\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = \frac{\text{كص}}{\text{كع}} \cdot \frac{\text{كع}}{\text{كس}}$$

= (6ع^{5}) (2س)

= 12س ع^{5}

= 12س(س^{2}-1)^{5}

مثال (15):

أوجد مشتقه الدالة د(س)=(س^{3}+2س^{2}-4)^{12} بالنسبة للمتغير س

الحل:

نفرض أن	ع	=	س^{3}+2س^{2} -4		
وأن	ص	=	ع^{12}		

فإنه يتضح لنا أن ص =د(س)هي تحصيل دالتين و بتطبيق القاعدة (*) نحصل على :

دَ(س) = $\frac{\text{كص}}{\text{كس}} = \frac{\text{كص}}{\text{كع}} \cdot \frac{\text{كع}}{\text{كس}}$

= (12ع^{11}) (3س^{2}+4س)

= 12(س^{3}+2س^{2} -4)^{11} (3س^{2}+4س)

نتيجة: إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق فإن الدالة

$ص = د^{ن}(س) = [د(س)]^{ن}$

حيث ن عدد صحيح ، د(س)K صفراً عندما تكون ن Δ 1 ، أيضاً قابلة للاشتقاق ويكون:

$$\frac{ءص}{ءس} = ن\,[د(س)]^{ن-1} \,.\, دَ(س)$$

مثال (16):أوجد مشتقه الدالة $ص = \frac{1}{(س^2+1)^3}$ عند س=-1

الحل:

على أفترض أن :	ع	=	$س^2+1$			فإن
	ص	=	$\frac{1}{ع^3}$		=	$ع^{-3}$

وبتطبيق النتيجة السابقة فإن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \,.\, \frac{ءع}{ءس}$$

$$= (-3ع^{-4})(2س)$$

$$= -6س(س^2+1)^{-4}$$

$$= \frac{-6س}{(س^2+1)^4}$$

وعند س=-1 فإن:

ءص	=	6	=	3
ءس		2^4		8

تدريب (3):استخدم قاعدة التسلسل لإيجاد	$\frac{ءص}{ءس}$	للدوال الآتية

أ)	ص	=	$(س^3-4س+8)^7$
ب)	د(س)	=	$\frac{1}{(س^2-3س-10)^3}$

مع بيان قيم س التي تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق عندها .

تمارين (1 -3)

س1 : أوجد مشتقه الدوال الآتية	$\frac{\text{كص}}{\text{كس}}$	مبيناً قيم س التي تكون الدالة عندها غير قابلة للاشتقاق

أ)	ص	=	$(\text{س}^2+1)^8$
ب)	ص	=	$\frac{1}{(\text{س}^2 - 2\text{س} - 8)^5}$

س2 : أوجد مشتقه الدوال الآتية	$\frac{\text{كص}}{\text{كس}}$	

أ)	ص	=	$(2\text{س}-3)^3$
ب)	د(س)	=	$\frac{1}{(\text{س}^2 - 6\text{س} - 5)^4}$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات

تطبيقات حساب التفاضل

تطبيقات حساب التفاضل

2

الجدارة :

أن يكون قادراً على ايجاد القيم العظمى والصغرى والإلمام بنظرية القيمة المتوسطة وإيجاد الدوال التزايدية و التناقصية وكذلك إيجاد فترات التقعر ونفط الانقلاب.

الأهدف:

عندما تكمل هذه الوحدة تكون قادراً على:

1. ايجاد القيم العظمى والصغرى القصوى.
2. معرفة نظرية القيمة المتوسطة.
3. ايجاد فترات التزايد و التناقص.
4. أيجاد فترات التقعر ونقطة الانقلاب.

مستوى الأداء المطلوب:

أن يصل المتدرب إلى الإتقان الكامل لمهارة ايجاد القيم العظمى والصغرى وإيجاد فترات التزايد و التناقص وكذلك فترات التقعر بنسبة 100٪ وأن لا تقل معرفتة لنظرية القيمة المتوسطة عن 90٪.

الوقت المتوقع للتدريب:

8 ساعات

الوسائل المساعدة.

1. استخدام التعليمات في هذه الوحدة.
2. سوف تحتاج إلى الرجوع إلى معلوماتك السابقة في الوحدة التدريبية الأولى.

متطلبات الجدارة.

1. طالما أنه لا يوجد شئ قبل هذه الوحدة يجب التدرب على جميع المهارات فيها.
2. تحتاج التدرب على مهارة إيجاد المشتقه الأولى والثانية في الوحدة التدريبية الأولى قبل دراسة هذه الوحدة التدريبية.

تطبيقات حساب التفاضل

(2 - 1) القيم العظمى والصغرى القصوى

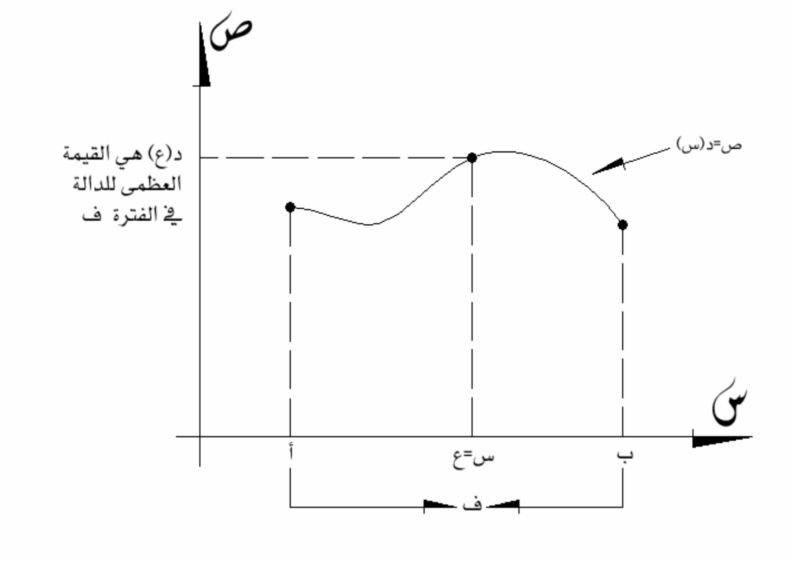
ألقيمه العظمى للداله:

نقـول أن الدالـه ص = د(س) المعرفـه في الفترة ف تأخذ قيمتها العظمى عند النقطة التي لها الأحداثي السيني س=ع بشرط .

أ) ع ∋ ف

ب) د(ع) Ω د(س) لجميـع قـيم س في ف وهذا يعني إن :

د(ع) هـي أكبر عدد في مجالها أنظر شكل (2-1).



شكل (2-1)

القيمة الصغرى للدالة:

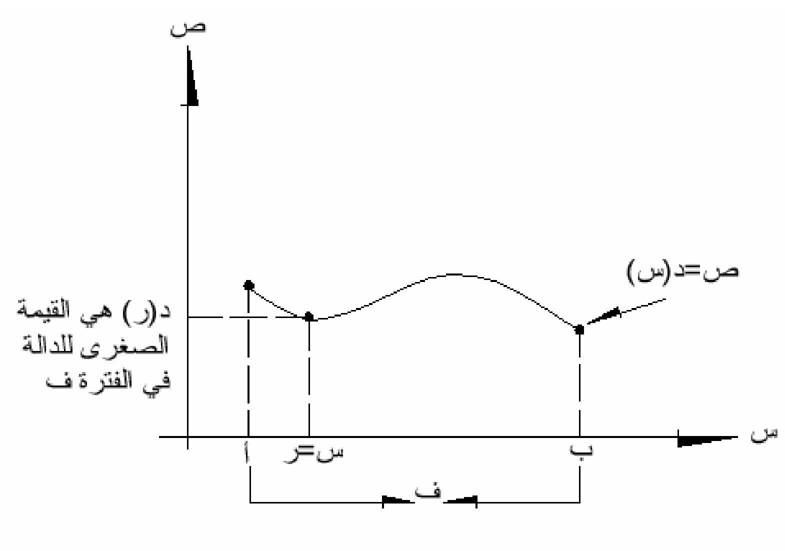
نقول أن الدالة ص=د(س) المعرفة في الفترة ف تأخذ قيمتها الصغرى عند النقطة التي لها الأحداثي السيني س= ر بشرط

أ) ر ∋ ف

ب) د(ر) ≤ د(س)لجميع قيم س في ف

وهذا يعني أن

د(ر) هـي أصغر عـدد في مجالها انظر شكل (2-2).



شكل (2-2)

النقطة الحرجة:

تعريف :

النقط الحرجة للدالة هي النقاط التي عندها تكون:

1 - دَ(س) = صفراً

2 - دَ(س) غير معرفة

حيث س في مجال الدالة والدالة متصلة في [أ ،ب] ، س ∈(أ ،ب)

ولايجاد النقط الحرجة للدالة :

أ) إذا كانت د(س)كثيرة حدود.

1 - نوجد دَ(س)

2 - نجعل دَ(س)= صفراً

ومنها نعين قيم س التي عندها تحدث النقطة الحرجة للدالة.

ب) إذا كانت د(س) دالة كسرية:

1 - نوجد دَ(س)

2 - نجعل البسط =0 ، المقام =0 شريطة أن يكون البسط والمقام دالة في المتغير س ومنها نعين قيم س التي عندها تحدث النقطة الحرجة للدالة.

مثال(1):

أوجد النقطة الحرجة للدالة : د(س)=س^2+1

الحل:

مجال الدالة ح وهي متصلة وقابلة للإشتقاق على مجالها .

دَ(س)	=	2س	=	0
		س	=	0

∴ النقطة الحرجة للدالة عند س =0

تذكر أن:

* النقطة الحرجة للدالة يجب أن تنتمي إلى مجال الدالة.
* مجال الدوال كثيرات الحدود هي ح.
* مجال الدوال الكسريه هو : ح- الأعداد التي عندها ينعدم المقام أي يساوي صفراً.

مثال (2):

أوجد النقطة الحرجة للدالة : د(س)=2س^3-3س^2-12س+1

الحل:

مجالها ح وهي متصلة وقابلة الاشتقاق على مجالها.

دَ(س)	=	6س^2	-	6 س	-	12	=	0
		س^2	-	س	-	2	=	0
			(س+1) (س-2)				=	0
ومنه								
س+1		=	0 ،		س-2		=	0
س		=	-1 ،		س		=	2

∴ النقطة الحرجة للدالة عند س =-1 ، س =2

مثال(3):

أوجد النقطة الحرجة للدالة : د(س)=س^2(س^2-1)

الحل :

د(س)=س^4-س^2

مجالها ح وهي متصلة وقابلة للاشتقاق على مجالها.

دَ(س)	=	4س^3	-	2س	=	0
		2س	(2س^2-1)		=	0

⬅	2س$=0$	ومنة س$=0$		
أو 2س^2	-1	$=$	0	
	س^2	$=$	$\frac{1}{2}$	
س	$=$	$\pm$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	

∴ النقطة الحرجة للدالة عند س$=0$ ،	س	$=$	$\pm$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	

و الآن نقدم خطوات ايجاد القيم العظمى والصغرى (القصوى) للدالة في [أ ، ب] حيث الدالة متصلة في [أ ، ب] :

1. نوجد الأعداد الحرجة في (أ ،ب)
2. نحسب قيمة الدالة عند طرفي الفترة وعند الأعداد الحرجة.
3. نقارن القيم التي حصلنا عليها فيكون :

*	أكبر القيم هي القيمة العظمى للدالة.
*	أصغر القيم هي القيمة الصغرى للدالة.

مثال(4):

أوجد القيم العظمى والصغرى(القصوى)للدالة:

د(س)$=2$س$^2+2$س$+1$ في الفترة$[-2,2]$

الحل:

1. نوجد الأعداد الحرجة:

دَ(س)	$=$	4 س	$+$	2	$=$	0
			4س		$=$	-2
			س		$=$	$\frac{-1}{2}$
∴	$\frac{-1}{2}$	$\in (-2,2)$				

∴س	=	$\frac{-1}{2}$ عندها نقطة حرجة للدالة.

2. نحسب د($-\frac{1}{2}$) ، د(-2) ، د(2)

د($-\frac{1}{2}$)	=	$2(\frac{1}{4})$	-1	+	1	=	$\frac{1}{2}$
د(-2)	=	$2(4)$	-4	+	1	=	5
د(2)	=	$2(4)$	$+4$	+	1	=	13

∴	$(2,13)$ القيمة العظمى.
	$(\frac{-1}{2} ، \frac{1}{2})$ القيمة الصغرى.

مثال(5):

أوجد القيم العظمى والصغرى (القصوى) للدالة.

د(س)= $\sqrt{16-س^2}$	في الفترة [$-2,2$]	

الحل: الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق في ($-2,2$)

1. نوجد الأعداد الحرجة:

∴	دَ(س)	=	$\frac{1}{2\times \text{الجذر}}$	×	مشتقه ما بداخل الجذر
	دَ(س)	=	$\frac{-2س}{2\sqrt{16-س^2}}$	=	$\frac{-س}{\sqrt{16-س^2}}$

∴	نجعل البسط	=	0	
	- س	=	0	
∴	س	=	0	
	ثم نجعل المقام	=	0	
	$16-س^2$	=	0	
	$س^2$	=	16	
	س	=	±4	وهذا مرفوض لأن $\pm4 \notin (-2,2)$

2. نحسب د(0) ، د(-2) ، د(2)

د(0)	=	$\sqrt{16-(2)^2}$	=	$\sqrt{16}$	=	4		
د(-2)	=	$\sqrt{16-(-2)^2}$	=	$\sqrt{16-4}$	=	$\sqrt{12}$	=	3.46
(2)	=	$\sqrt{16-(2)^2}$	=	$\sqrt{16-4}$	=	$\sqrt{12}$	=	3.46

∴	(4.0)القيمة العظمى.
	(-2، $\sqrt{12}$) ، (2، $\sqrt{12}$) القيمة الصغرى

ملاحظة هامة :

1. الأعداد الحرجة لابد أن تكون داخل الفترة المفتوحة (أ ،ب)
2. إذا لم توجد أعداد حرجة للدالة المتصلة على الفترة المغلقة[أ ،ب] فإن القيمة العظمى تحدث عند أحد نهايتي الفترة أي عند د(أ)، د(ب) والقيمة الصغرى تحدث عند نهاية الفترة الآخرى.

مثال(6): عين القيم العظمى و الصغرى(القصوى)للدالة أن وجدت:

د(س)= $\frac{3}{س^2+2}$ في [-2,3]

الحل:

الدالة متصلة في [-2,3] وتقبل الاشتقاق في (-2، 3)

1. نوجد النقاط الحرجة.

د̀(س)= $\frac{-6س}{(س^2+2)}$

∴	البسط	=	0	
	-6س	=	0	
	س	=	0	
	المقام	=	0	
	$(س^2+2)^2$	=	0	
	$س^2+2$	=	0	
	$س^2$	=	-2	
	س	=	$\pm\sqrt{-2}$	∌ ح وهو مرفوض

2. نحسب د(0) ، د (-2) ،د (3)

د(0)	=	$\frac{3}{2+0}$	=	$\frac{3}{2}$		
د (-2)	=	$\frac{3}{2+4}$	=	$\frac{3}{6}$	=	$\frac{1}{2}$
د (3)	=	$\frac{3}{2+9}$	=	$\frac{3}{11}$		
∴		(0، $\frac{3}{2}$)		القيمة العظمى		
		(3، $\frac{3}{11}$)		القيمة الصغرى		

مثال(7):

أوجد القيم العظمى و الصغرى(القصوى)للدالة:د(س)=2س^3-3س^2-12س+5 في الفترة[-2، 4]

الحل:

الدالة متصلة وقابلة للأشتقاق .

1. نوجد النقاط الحرجة.

دَ(س)	=	6س^2	-6س	-12	=	0
		س^2	- س	-2	=	0
		(س+1)		(س-2)	=	0
	س = -1		س = 2			

2. نحسب د(-1) ، د(2) ، د(-2) ، د(4)

د(-1)	=	-2	-3	+12	+5	=	12
د(2)	=	16	-12	-24	+5	=	-15
د(-2)	=	-16	-12	+24	+5	=	1
د(4)	=	128	-48	-48	+5	=	37
∴		(4، 37)		القيمة العظمى			
		(2 ، - 15)		القيمة الصغرى			

مثال(8):

أوجد القيم العظمى والصغرى(القصوى)للدالة:

د(س)= س^{3}-9س^{2}+ 24س في الفترة [0 ، 6]

الحل:

الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق.

1. نوجد النقاط الحرجة.

دَ(س)	=	3س^{2}	-18س	+24	=	0
		س^{2}	-6س	+8	=	0
	(س-2)		(س-4)		=	0
	س=2 ، س=4					

2. نحسب: د(2) ، 2(4) ، د(0) ، د(6)

د(2)	=	8	-36	+48	=	20
د(4)	=	64	-144	+96	=	16
د(0)	=	0	-0	+0	=	0
د(6)	=	216	-324	+144	=	36
∴			(6، 36) القيمة العظمى			
			(0 ، 0) القيمة الصغرى			

تدريب (1):

أوجد القيم العظمى والصغرى(القصوى)للدوال الآتية:

أ)	د(س)	=	2س^{3}-3س^{2}-12س+1	في الفترة[-2 ، 4]
ب)	د(س)	=	$\sqrt{9-س^{2}}$	في الفترة[-2 ، 2]

تمارين (2 -1)

س1 : أوجد النقاط الحرجة للدوال الآتية:

أ)	د(س)	=	$س^3+1$
ب)	د(س)	=	$س^3-6س^2+9س-15$
جـ)	د(س)	=	$2س^3-3س^2-12س-5$

س2 : أوجد القيم العظمى والصغرى (القصوى) للدوال الآتية:

أ)	د(س)	=	$3س^2+2س+1$	في الفترة[-2 ، 2]
ب)	د(س)	=	$\sqrt{36-س^3}$	في الفترة[-3 ، 3]
جـ)	د(س)	=	$\frac{2}{س^3+3}$	في الفترة[-2 ، 4]

(2 -2) نظرية القيمة المتوسطة:

سنتاول نظرية هامة جداً قبل "نظرية القيمة المتوسطة" تسمى نظرية رول.

وهي تعتبر حالة خاصة من نظرية القيمة المتوسطة

نظرية رول:

أذا كانت الدالة د:

1. متصلة في [أ ، ب].
2. قابلة للاشتقاق في (أ ، ب)
3. د (أ) = د(ب)

فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∋(أ ، ب) بحيث ان : دَ(جـ)=صفراً

مثال(9):

أوجد قيمة جـ التي تحققها نظرية رول للدالة:

د(س)=$س^2-8س+9$ في [2 ، 6]

الحل:

1) الدالة متصلة في [2 ، 6] لأنها كثيرة حدود.

2) الدالة قابلة للاشتقاق في (2 ، 6) لأنها كثيرة حدود.

3)	د(2)	=	4-16+9	=	-3
	د(6)	=	36- 48+9	=	-3

∴ د(2)= د(6)

∴ شروط نظرية رول متوفرة و بالتالي فإنه يوجد جـ ∋ (2، 6)بحيث أن:

دَ(جـ)	=	0	
2جـ- 8	=	0	
2جـ	=	8	
جـ	=	$\frac{8}{2}$	
جـ	=	4	4∋ (2 ، 6)

مثال(10):

أوجد قيمة جـ التي تعينها نظرية رول للدالة :

د(س)=س^2-4س-6 في الفترة [0 ، 4]

الحل:

1) الدالة متصلة في [0 ، 4] لأنها كثيرة حدود.

2) الدالة قابلة للاشتقاق في (0 ، 4) لأنها كثيرة حدود.

3)	د(0)	=	0-0-6	=	-6
	د(4)	=	16-16-6	=	-6

∴ د(0)= د(4)

∴ شروط نظرية رول متوفرة و بالتالي فإنه يوجد جـ ∋ (0، 4)بحيث أن:

دَ(جـ)	=	0	
2جـ-4	=	0	
2جـ	=	4	
جـ	=	2	2∋ (0 ، 4)

مثال(11):

ابحث أمكانية تطبيق نظرية رول للدالة :

د(س)=س^3+س في الفترة [-2 ، 1]

الحل:

1) الدالة متصلة في [-2 ، 1] لأنها كثيرة حدود.

2) الدالة كثيرة حدود وبالتالي هي قابلة للاشتقاق في (-2 ، 1) .

3) د(-2)	=	- 8 - 2	=	-10
د(1)	=	1+1	=	2
∴ د(-2)Kد(1)				

∴ الدالة لا يمكن تطبيق نظرية رول عليها لعدم تحقق الشرط الثالث.

ملاحظة هامة :

لا يمكن تطبيق نظرية رول في أحدى الحالات الآتية:

1. إذا كانت الدالة غير متصلة في الفترة المغلقة[أ ، ب]
2. إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ،ب) .
3. إذا كانت د(أ) Kد(ب) كما في مثال (11).

نظرية القيمة المتوسطة (نظرية لاجرانج):

إذا كانت الدالة د:

1. متصلة في [أ ، ب]
2. قابلة للاشتقاق في (أ ، ب)

فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∋ (أ . ب)بحيث دَ(جـ)= $\frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

مثال (12):

أبحث أمكانية تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة للدالة :

د(س)=س^3+1 في الفترة[-2 ، 4] ثم أوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية.

الحل:

1. الدالة متصلة في $[-2 ، 4]$ لأنها كثيرة حدود.
2. الدالة قابلة للاشتقاق في $(-2 ، 4)$ لأنها كثيرة حدود.

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة تحققت وبالتالي يوجد جـ $\in (-2 ، 4)$ بحيث أن :

د َ(جـ)	=	$\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$
3جـ^2	=	$\frac{د(4) - د(-2)}{4-(-2)}$
3جـ^2	=	$\frac{65-(-7)}{4+2}$
3جـ^2	=	$\frac{65+7}{6}$
3جـ^2	=	12
جـ^2	=	4
جـ	=	± 2
لكن جـ	=	$-2 \notin (-2 ، 4)$ مرفوض
∴ جـ	=	$2 \in (-2 ، 4)$
∴ قيمة العدد الذي تعينه نظرية القيمة المتوسطة هي		
جـ	=	2

مثال (13): أوجد قيمة جـ التي نحصل عليها من نظرية القيمة المتوسطة للدالة:

د(س) = س^2 - س - 9 في الفترة $[0 ، 3]$

الحل:

1. الدالة متصلة في $[0 ، 3]$ لأنها كثيرة حدود.
2. الدالة قابلة للاشتقاق في $(0 ، 3)$ لأنها كثيرة حدود.

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة متوفرة و بالتالي يوجد جـ $\in (0 ، 3)$ بحيث أن:

د َ(جـ)	=	$\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$
2جـ - 1	=	$\frac{د(3) - د(0)}{3-0}$
2جـ - 1	=	$\frac{-3-(-9)}{3}$
2جـ - 1	=	$\frac{-3+9}{3}$

2جـ - 1	=	2
2جـ	=	3
جـ	=	$\frac{3}{2}$ ∋ (0 ، 3)
∴ قيمة العدد جـ الذي تعينه نظرية القيمة المتوسطة هو:		
جـ	=	$\frac{3}{2}$

تدريب (2):

1. أوجد قيمة جـ التي تعينها نظرية رول للدالة :

د(س)= س^{2}-3س-4 في الفترة [0 ، 3]

2. أوجد قيمة جـ التي نحصل عليها من نظرية القيمة المتوسطة للدالة :

د(س)= س^{3}-س في الفترة [0 ، 3]

تمارين (2 -2)

س$_{1}$: هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالة وإن كان ذلك غير ممكن فهل يمكن تطبيق نظرية القيمة المتوسطة عليها وبنفس الفترة:

د(س)=س^{3}+س في الفترة [-2، 1]

س$_{2}$: أختبر الدالة من حيث توفر شروط نظرية القيمة المتوسطة وأوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية أن وجدت في :

أ) الفترة [0 ، 3]	ب) الفترة [1 ، 2]
حيث : د(س) = س^{2}+3س-4	

(2 -3): الدوال التزايدية والدوال التناقصية:

نظرية :

لتكن د دالة متصلة في[أ ، ب] وقابلة الاشتقاق في (أ ،ب):

1. إذا كانت دَ(س) > 0 لكل س ∋ (أ ،ب) فإنه د تزايدية.
2. إذا كانت دَ(س) < 0 لكل س ∋ (أ ،ب) فإنه د تناقصية.

مثال (14):

ابحث فترات التزايد و التناقص للدالة:

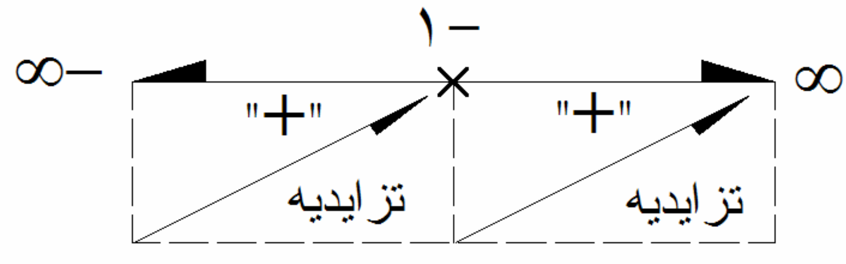
د(س)=س^{3}+3س^{2}+3س-1

الحل:

1. الدالة متصلة لكل س ∋ح لأنها كثيرة حدود.
2. الدلة قابلة للاشتقاق لكل س ∋ح لأنها كثيرة حدود.

دَ(س)	=	3 س^{2}+6س+3	=	0
		س^{2}+2س+1	=	0
		(س+1)(س+1)	=	0
الدالة لها جذر مكرر				
		س+ 1	=	0
		س	=	-1

3. نبحث إشارة المشتقه قبل وبعد س=-1 على خط الأعداد.



الدلة في(-∞، ∞) تزايديه أي أن الدلة تزايدية لكل س ∋ح.

مثال(15): أبحث فترات التزايد والتناقص للدالة: د(س) = س^2 - 3

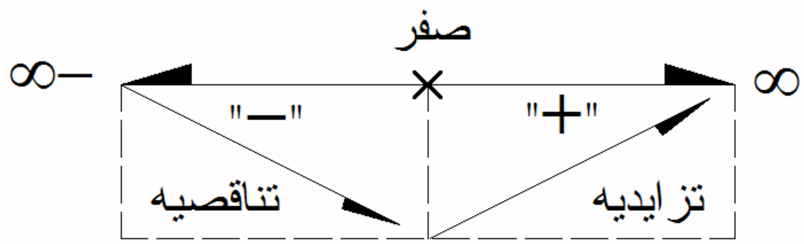
الحل:

1. الدلة متصلة لكل س ∋ ح لأنها كثيرة حدود.
2. الدلة تقبل الاشتقاق لكل س ∋ ح لأنها كثيرة حدود.

د َ(س)=2س=0

س=0

3. نبحث إشارة المشتقة قبل وبعد :س=0 على خط الأعداد.



الدلة في(-∞,**0** [تناقصية.

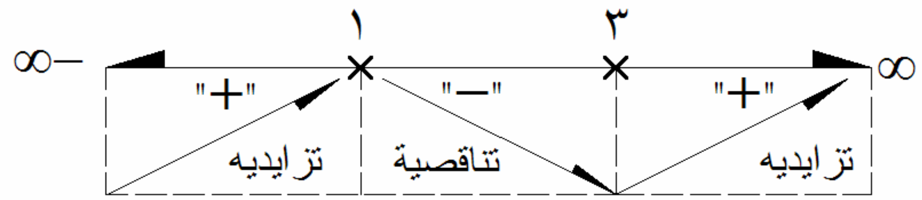
الدلة في] 0,∞) تزايدية.

مثال(16): عين فترات التزايد والتناقص للدالة: د(س)=س^3 - 6س^2+9س+1

1. الدالة متصلة لكل س∋ ح لأنها كثيرة حدود.
2. الدالة قابلة للاشتقاق لكل س∋ ح لأنها كثيرة حدود.

د َ(س)	=	3س^2-12س+9	=	0
		س^2-4س+3	=	0
		(س-1)(س-3)	=	0
س=1			س=3	

3. دراسة أشارة دَ(س) قبل وبعد س=1 وقبل وبعد س=3 على خط الأعداد



الدالة في (-∞,**1**] ، [3، ∞) تزايدية

الدالة في [1 ، 3] تناقصية .

تدريب (3):

أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة : د(س)= 2س^{3}-3س^{2}-12س.

تمارين (2-3):

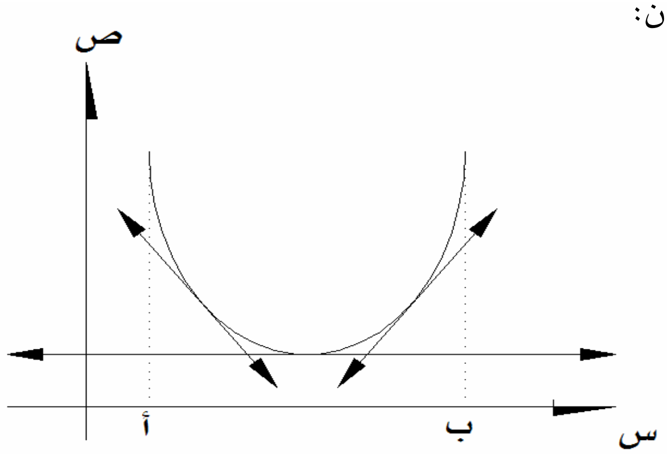
س^{1} : ابحث فترات التزايد و التناقص للدالة: د(س) =س^{2}-4

س^{2} : عين فترات التزايد و التناقص للدالة: د(س) =2س^{3}-9س^{2}+12س+1

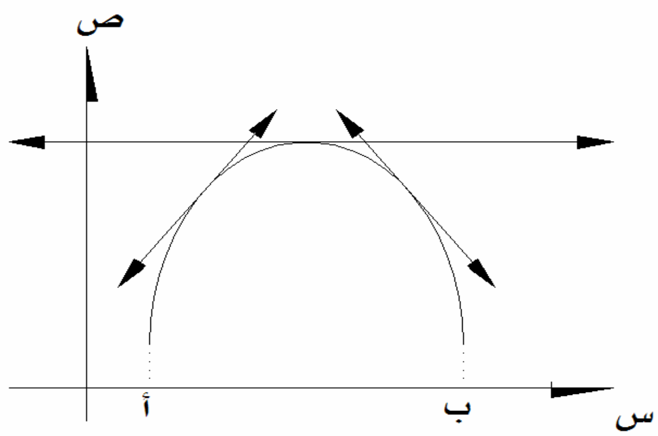
س^{3} : أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة: د(س)=2س^{3}+6س^{2}-18س+1

(2 -4): التقعر ونقط الانقلاب:

إذا كانت د دالة متصلة في [أ ، ب] فإننا نقول أن:



1. منحنى الدالة مقعر إلى أعلى في الفترة [أ ، ب] إذا وقع المنحنى فوق جميع مماساته كما في الشكل التالي:



2. منحنى الدالة مقعر إلى أسفل في الفترة [أ ، ب] إذا وقع المنحنى تحت جميع مماساته كما في الشكل التالي:

نظرية:

لتكن د متصلة في [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق مرتين على الفترة (أ ، ب)

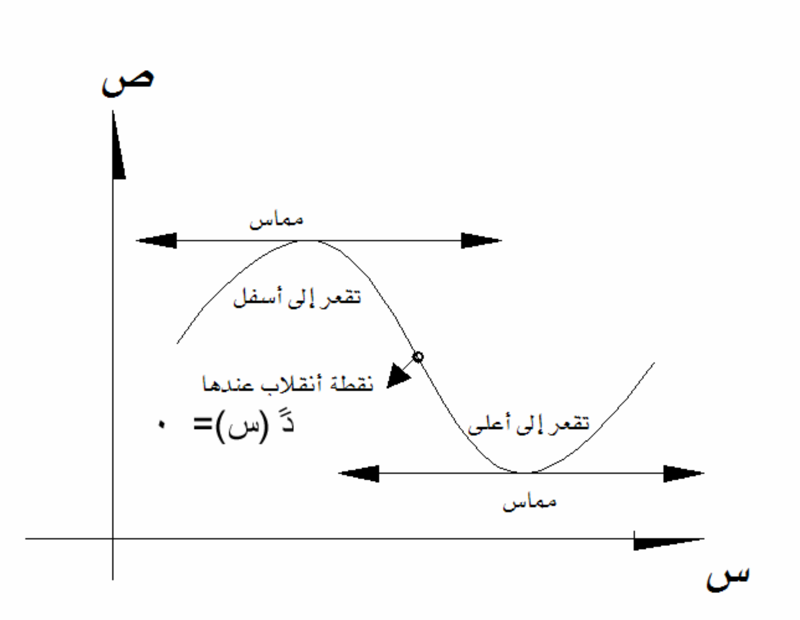
1. إذا كانت : دً(س) >0 لكل س∋ (أ ،ب) فإن د مقعرة إلى أعلى على الفترة(أ ،ب).
2. إذا كانت : دً(س) <0 لكل س∋ (أ ، ب) فإن د مقعرة إلى أسفل على الفترة(أ ،ب)

تعريف :

إذا كانت الدالة متصلة في [أ ، ب] فإن نقطة أنقلاب منحني هذه الدالة:

هي نقطة(جـ ،د(جـ)) إذا كانت دً(جـ)= 0 بشرط أن :

إشارة دً (س) قبل وبعد جـ تتغير من سالب إلى موجب أو من موجب إلى سالب حيث جـ ∋ (أ ، ب)



من التعريف السابق نقول أن نقطة الانقلاب:

هي النقطة التي عندها يغير منحنى الدالة اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى أو من أعلى إلى أسفل.

مثال(17):

عين فترات التقعر ونقطة الانقلاب إن وجدت للدالة:

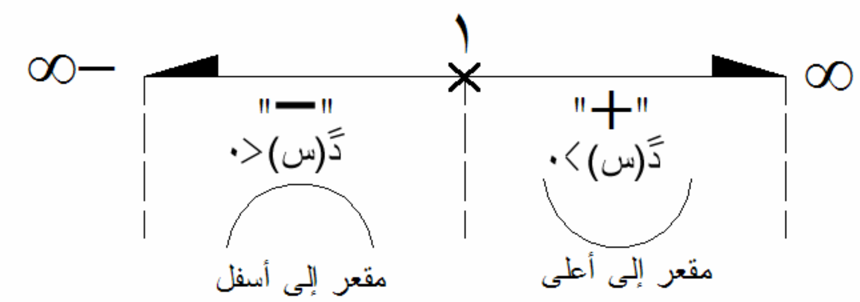
د(س)=س^3 - 3س^2+6س+6

الحل:

1. الدالة متصلة لكل س∋ ح (كثيرة حدود)
2. الدالة قابلة للاشتقاق لكل س∋ ح (كثيرة حدود)

دَ(س)	=	3س^2-6س+6
دً(س)	=	6س-6=0
6س	=	6
س	=	1

3. نبحث اشارة دً(س)قبل وبعد س=1 كما في خط الأعداد:



∴	*	منحنى الدالة مقعر نحو الأعلى في [1, ∞)
	*	منحنى الدالة مقعر نحو الأسفل في (-∞ ,1]
∴		يوجد نقطة انقلاب وهي : (1 ، 10)

مثال (18):

أوجد منطقة التقعر إلى أعلى وإلى أسفل ونقطة الانقلاب إن وجدت للدالة:

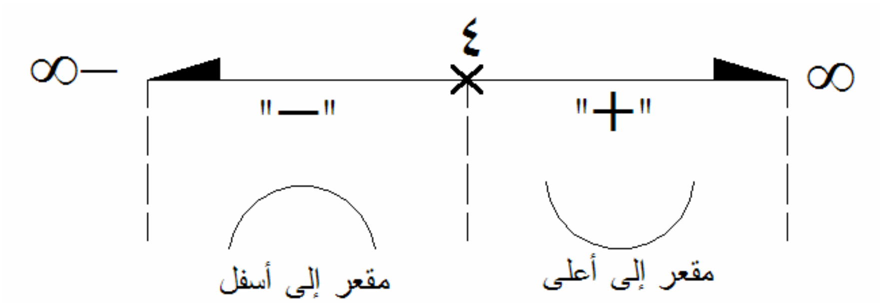
د(س)=س^3-12س^2+100

الحل:

الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∋ ح لأنها كثيرة حدود.

دَ(س)	=	3س^2-24س		
دً(س)	=	6س -24	=	0
		6س	=	24
		س	=	$\frac{24}{6}$
		س	=	4

نبحث الآن إشارة دً(س) قبل وبعد س=4 كما في خط الأعداد:



∴ منطقة التقعر إلى أعلى في الفترة [4 ، ∞)

∴ ومنطقة التقعر إلى أسفل في الفترة (-∞ ، 4]

و منه يوجد نقطة انقلاب هي (4 ، -28)

مثال (19):

ادرس فترات التقعر ونقطة الانقلاب إن وجدت للدالة:

د(س)=$س^{4}$-8$س^{3}$+24$س^{2}$

الحل:

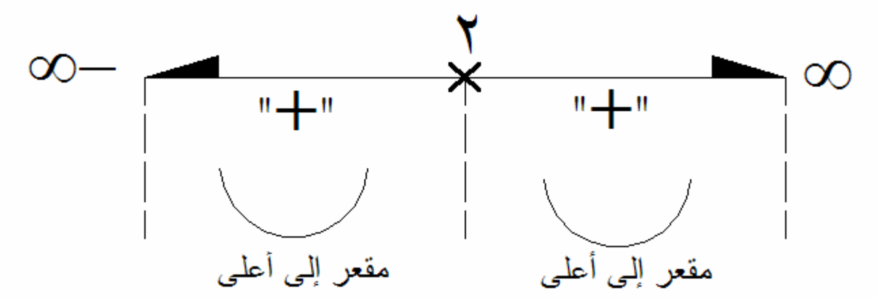
الدلة متصلة وقابلة للاشتقاق لكل س ∋ ح لأنها كثيرة حدود.

دَ(س)	=	4$س^{3}$-24$س^{2}$+48س		
دً(س)	=	12$س^{2}$-48س+48	=	0
		$س^{2}$-4س+4	=	0
		(س-2)(س-2)	=	0

الجذر مكرر ومنه :

س=2

نبحث الآن إشارة دً(س) قبل وبعد س=2 كما في خط الأعداد:



∴ منحنى الدلة مقعر إلى أعلى في الفترتين (−∞ ، 2] [2 ، ∞)

∴ لا يوجد نقطة انقلاب

ملاحظة: الشرط اللازم لوجود نقطة انقلاب أن إشارة دً(س) تتغير إشارتها بجوار هذه النقطة

تدريب(**4**):

عين فترات التقعر لمنحنى الدالة: د(س)=س^{3}-3س^{2}-14س+17

ثم أوجد نقطة الانقلاب أن وجدت ؟

تمارين(2 -4)

س1 :عين فترات التقعر ونقطة الانقلاب أن وجدت للدالة :

$$\text{د(س)}=\text{س}^{3}+3\text{س}^{2}-5$$

س2 :أوجد منطقة التقعر إلى أعلى و منطقة التقعر إلى أسفل ونقطة الانقلاب إن وجدت للدالة.

$$\text{د(س)}=\text{س}^{3}-3\text{س}-2$$

س3 :ادرس تقعر المنحنى و أوجد نقطة الانقلاب إن وجدت للدالة.

$$\text{د(س)}=\text{س}(\text{س}-3)^{2}$$

س4 : عين فترات التقعر لمنحنى الدالة :د(س)= $\text{س}^{4}-24\text{س}^{2}+4$ ثم أوجد نقط الانقلاب إن وجدت للدالة.

س5 : عين فترات التقعر ونقطة الأنقلاب إن وجدت للدالة

$$\text{د(س)}=4\text{س}^{3}+9\text{س}^{2}+6\text{س}-2$$

المملكة العربية السعودية
المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني
الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات

حساب التكامل

حساب التكامل

3

الجدارة:

أن يكون قادراً على ايجاد التكامل غير المحدود والتكامل المحدود والإلمام بقواعد التكامل .

الأهداف :

عند تكمل هذه الوحدة تكون قادراً على:

1. ايجاد التكامل غير المحدود.
2. معرفة قواعد التكامل.
3. حساب التكامل المحدود.

مستوى الأداء المطلوب:

أن يصل المتدرب إلى الاتقان الكامل لايجاد حساب التكامل بنسبة 100٪ وأن لا تقل نسبة معرفتة لقواعد التكامل عن 90٪.

الوقت المتوقع للتدريب.

8 ساعات

الوسائل المساعدة:

1. استخدام التعليمات في هذه الوحدة.
2. سوف تحتاج إلى الرجوع إلى معلوماتك السابقة في الوحدة الأولى والثانية.

متطلبات الجدارة:

1. طالما أنه لا يوجد شئ قبل هذه الوحدة يجب التدريب على جميع المهارات فيها.
2. تحتاج التدرب على استخدام تحليل فرق بين مربعين وتحليل المقدار الثلاثي وإستخدام العامل المشترك كما درستها في السنة الأولى قبل دراسة هذه الوحدة التدريبية.

حساب التكامل

من تراثنا المشرق:

يعتبر الحسن بن الهيثم المتوفى سنة 430هـ من الذين ساهموا في التمهيد لحساب التكامل وقد أثبت كل من(يوسكفيتش) و (رونفلد)أن ابن الهيثم هو الذي أوجد مجموع سلسلتي الأس الثالث والأس الرابع للأعداد الطبيعية ،عندما كان يقوم بحساب حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران قطعة قائمة من قطع مكافئ حول محور عمودي على محور تماثلها ، وان هذه الأعمال قد ساعدت على اكتشاف التفاضل و التكامل.

(3 -1) التكامل غير المحدود:

لقد تحدثنا في الوحدة الأولى من هذه الحقيبة التدريبة عن التفاضل وطريقة إيجاد المشتقه $\frac{\text{كص}}{\text{كس}}$ أو دَ(س)لدالة معطاة ص=د(س)، وفي هذه الوحدة نتعرض للعملية العكسية للتفاضل أي ايجاد الدالة إذا عرفت مشتقتها:

فمثلاً لو فرضنا أن د(س)=س^2 فإن : دَ(س) =2س

لكن ما هي العملية العكسية لعملية الاشتقاق للدالة المعطاة اعلاه ؟

العملية العكسية هي : د(س)=س^2

هذه العملية العكسية والتي هي عملية الحصول على الدالة من مشتقاتها تسمى بعملية التكامل ويرمز له بالرمز $\int$

تعريف:

ليكن لدينا الدالة المشتقه د(س) ، فيكون مجموعة كل المشتقات العكسية للدالة د(س) تسمى التكامل غير المحدود للدالة د ويرمز لها بالرمز $\int$ د(س). كس

ونشير إلى التكامل غير المحدد كمايلي:

$\int$ د(س). كس=ل(س)+ث

حيث أن : لَ(س)=د(س) ، ث يسمى ثابت التكامل

نظرية (1):

إذا كانت الدالة دَ(س) تساوي صفراً على الفترة [ا ،ب] فإن د تكون ثابتة في الفترة [أ ،ب] أي أن تكامل الدوال الثابتة يكون بالصورة:

$\int$ أ. ءس = أس+ث حيث ث ثابت

مثال (1):

أوجد التكاملات الآتية :

أ) $\int \frac{1}{2}$ءس	ب) $\int$ 13. ءس	ج) $\int$. ءس

الحل:

أ)	$\int \frac{1}{2}$. ءس	=	$\frac{1}{2}$ س+ث
ب)	$\int$ 13. ءس	=	13س+ث
جـ)	$\int$ ءس	=	س+ث

نظرية (2):

$\int$ س^{ن}. ءس = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ +ث حيث ن $\neq$ -1 ،ث عدد ثابت

مثال (2):

أوجد مايلي:	أ) $\int$ س^{2}. ءس	ب) $\int$ 16س^{3}. ءس	جـ) $\int$ 2س$^{-2}$. ءس	د) $\int$ 5س^{7}. ءس

الحل :

أ)	$\int$ س^{2}. ءس	=	$\frac{\text{س}^{3}}{3}$+ث
		=	$\frac{1}{3}$س^{3}+ث
ب)	$\int$ 16س^{3}. ءس	=	$\frac{16\text{س}^{4}}{4}$+ث
		=	4س^{4}+ث

جـ)	$\int 2س^{-2}\,.\,ءس$	=	$\frac{2س^{-1}}{-1}+ث$
		=	$-2س^{-1}+ث$
		=	$\frac{-2}{س}+ث$
د)	$\int 5س^{7}\,.\,ءس$	=	$\frac{5س^{8}}{8}+ث$
		=	$\frac{5}{8}س^{8}+ث$

ملاحظة :التكامل يتوزع علي عمليتي الجمع والطرح

مثال(3): $\int (س^4+2س^2-12س-16)\,.\,ءس = \frac{س^5}{5}+\frac{2س^3}{3}-6س^2-16س+ث$

ملاحظة:لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما لذلك نلجأ عادة إلى إجراء عملية الضرب أو القسمة.

مثال (4):

أوجد مايلي:

أ)	$\int (س-2)(س+1)\,.\,ءس$	ب)	$\int س(2س-3)^2\,.\,ءس$
جـ)	$\int \frac{4س^5-3س^3-6}{س^2}\,.ءس$	د)	$\int (4س^5+3س)\,.\,ءس$
هـ)	$\int (3س^2-5س+\frac{2}{س^2}+\frac{6}{س^7}-13)\,.\,ءس$		

الحل:

أ)	$\int (س-2)(س+1).ءس$	=	$\int (س^2-س-2)\,.\,ءس$
		=	$\frac{س^3}{3}-\frac{س^2}{2}-2س+ث$
		=	$\frac{1}{3}س^3-\frac{1}{2}س^2-2س+ث$
ب)	$\int س(2س-3)^2..ءس$	=	$\int (4س^3-12س^2+9س)\,.\,ءس$
		=	$\frac{4س^4}{4}-\frac{12س^3}{3}+\frac{9س^2}{2}+ث$

		=	$س^4 - 4س^3 + \frac{9}{2}س^2 + ث$
ج)	$\int \frac{4س^5 - 3س^3 - 6}{س^2} . ءس$	=	$\int (4س^3 - 3س - \frac{6}{س^2}) . ءس$
		=	$\int (4س^3 - 3س - 6س^{-2}) . ءس$
		=	$\frac{4س^4}{4} - \frac{3س^2}{2} - \frac{6س^{-1}}{-1} + ث$
		=	$س^4 - \frac{3}{2}س^2 + \frac{6}{س} + ث$
د)	$\int (4س^5 + 3س) . ءس$	=	$\frac{4س^6}{6} + \frac{3س^2}{2} + ث$
		=	$\frac{2}{3}س^6 + \frac{3}{2}س^2 + ث$
هـ)	$\int (3س^2 - 5س + \frac{2}{س^2} + \frac{6}{س^7} - 13) . ءس$		
		=	$\int (3س^2 - 5س + 2س^{-2} + 6س^{-7} - 13) . ءس$
		=	$\frac{3س^3}{3} - \frac{5س^2}{2} + \frac{2س^{-1}}{-1} + \frac{6س^{-6}}{-6} - 13س + ث$
		=	$س^3 - \frac{5}{2}س^2 - 2س^{-1} - س^{-6} - 13س + ث$
		=	$س^3 - \frac{5}{2}س^2 - \frac{2}{س} - \frac{1}{س^6} - 13س + ث$

تدريب (1):أوجد التكاملات الآتية:

أ)	$\int (س^2 - 2)(س^2 + 2) . ءس$
ب)	$\int \frac{س^5 - 2س^3 + 2}{س^2} . ءس$

تمارين (3-1)

س1 : أوجد التكاملات الآتية:

أ)	$\int (س + 2)(4س^2 + 1) . ءس$
ب)	$\int س^2 (4س + 3) . ءس$

س^2 : أوجد مايلي:

أ)	$\int (3\text{س}^2 - 2\text{س} + 3)\ .\ \text{ءس}$
ب)	$\int \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 3}\ .\ \text{ءس}$

س^3 : أوجد التكاملات الآتية:

أ)	$\int \frac{\text{س}^2 - 3\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}}}$
ب)	$\int \left(\frac{1}{\text{س}^2} + 2\text{س}^2\right)^2 .\ \text{ءس}$

(3 -2) قواعد للتكامل غير المحدود:

قاعدة(1): إذا كان أ ، ب عددين ثابتين ، ن$\neq$ -1 فإن

$$\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}} .\ \text{ءس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ث}$$ حيث ث ثابت

مثال (5): أوجد مايلي:

أ)	$\int (2\text{س}+5)^3 .\ \text{ءس}$
ب)	$\int 4(\frac{1}{2}\text{س}-1)^7 .\ \text{ءس}$
ج)	$\int \frac{8}{(3-2\text{س})^5}\ .\ \text{ءس}$

الحل:

أ)	$\int (2\text{س}+5)^3 .\ \text{ءس}$	=	$\frac{(2\text{س}+5)^4}{2\times 4} + \text{ث}$
		=	$\frac{1}{8}(2\text{س}+5)^4 + \text{ث}$
ب)	$\int 4(\frac{1}{2}\text{س}-1)^7 .\ \text{ءس}$	=	$4\times \frac{(\frac{1}{2}\text{س} - 1)^8}{\frac{1}{2}\times 8}$
		=	$4\times \frac{(\frac{1}{2}\text{س} - 1)^8}{4}$

		=	$(\frac{1}{2}س-1)^{8}$
ج)	$\int \frac{8}{(3-2س)^{5}}$. ءس	=	$\int 8\times(3-2س)^{-5}$. ءس
		=	$8\times\frac{(3-2س)^{-4}}{-4\times 3}$
		=	$8\times\frac{(3-2س)^{-4}}{-12}$
		=	$-\frac{2}{3}(3-2س)^{-4}$
		=	$-\frac{2}{3(3-2س)^{4}}$

قاعدة (2) $\int \frac{د'(س)}{\sqrt{د(س)}}$. ءس $= 2\sqrt{د(س)}$ +ث وهي خاصة بالجذور التربيعيه

مثال (6) أوجد : $\int \frac{2س}{\sqrt{س^{2}-3}}$. ءس

الحل :

$\int \frac{2س}{\sqrt{س^{2}-3}}$. ءس $=$ $2\sqrt{س^{2}-3}$ +ث

مثال (7) أوجد : $\int \frac{س^{2}+1}{\sqrt{2س^{3}+6س}}$. ءس

الحل : لا نستطيع تطبيق قاعدة (2) إلا بضرب البسط والمقام في (6):

$\int \frac{س^{2}+1}{\sqrt{2س^{3}+6س}}$. ءس$=$ $\int \frac{6س^{2}+6}{6\sqrt{2س^{3}+6س}}$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6\text{س}^2+6}{\sqrt{2\text{س}^3+6\text{س}}}$$

$$= \frac{1}{6} \times (2\sqrt{2\text{س}^3+6\text{س}}) + \text{ث}$$

$$= \frac{2}{6}\sqrt{2\text{س}^3+6} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{2\text{س}^3+6\text{س}} + \text{ث}$$

مثال (8) : أوجد : $\int \frac{3\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^3+2}} \,.\, \text{ءس}$

الحل:

$$\int \frac{3\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^3+2}} \,.\, \text{ءس} = 2\sqrt{\text{س}^3+2} + \text{ث}$$

قاعدة (3):

$$\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}} \,.\, \text{دَ(س)} \,.\, \text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \quad \text{لكل س} \in \text{ف} \;،\; \text{ن} \neq -1$$

مثال (9):أوجد : $\int (3\text{س}^2+2)^3 .(6\text{س}) \,.\, \text{ءس}$

الحل:

$$\int (3\text{س}^2+2)^3 .(6\text{س}) \,.\, \text{ءس} = \frac{(3\text{س}^2+2)^4}{4} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{4}(3\text{س}^2+2)^4 + \text{ث}$$

مثال(10): أوجد: $\int 2\text{س}(\text{س}^2-5)^4 \,.\, \text{ءس} = \frac{(\text{س}^2-5)^5}{5} + \text{ث}$

$$= \frac{1}{5}(\text{س}^2-5)^5 + \text{ث}$$

مثال(11): أوجد: $\int (\text{س}^2-3\text{س}+2)^5(2\text{س}-3) .\, \text{ءس} = \frac{(\text{س}^2-3\text{س}+2)^6}{6} + \text{ث}$

$$= \frac{1}{6}(\text{س}^2-3\text{س}+2)^6 + \text{ث}$$

مثال(10): أوجد : $\int \sqrt[5]{\text{س}^4+2\text{س}-3}\,(4\text{س}^3+2)\;.\;\text{ءس}$

	=	$\int (\text{س}^4+2\text{س}-3)^{\frac{1}{5}}(4\text{س}^3+2)\;.\;\text{ءس}$
	=	$\frac{(\text{س}^4+2\text{س}-3)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}+\text{ث}$
	=	$\frac{(\text{س}^4+2\text{س}-3)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+\text{ث}$
	=	$\frac{5(\text{س}^4+2\text{س}-3)^{\frac{6}{5}}}{6}+\text{ث}$
	=	$\frac{5}{6}(\text{س}^4+2\text{س}-3)^{\frac{6}{5}}+\text{ث}$

تدريب (2): أوجد مايلي:

أ)	$\int \frac{12}{(2-3\text{س})^5}\;.\;\text{ءس}$
ب)	$\int \frac{3\text{س}^2}{\sqrt{\text{س}^3+5}}\;.\;\text{ءس}$
جـ)	$\int (2\text{س}-2)(\text{س}^2-2\text{س}+4)^6\;.\;\text{ءس}$

تمارين (3 -2)

س1 : أوجد مايلي :

1)	$\int (2\text{س}+4)^7\;.\;\text{ءس}$
2)	$\int 3(\frac{1}{2}\text{س}-2)^8\;.\;\text{ءس}$
3)	$\int \frac{4}{(3-2\text{س})^9}\;.\;\text{ءس}$

س2 : أوجد مايلي :

1)	$\int \frac{2}{\sqrt{2\text{س}-7}}\;.\;\text{ءس}$

2)	$\int$	$\dfrac{3س^2}{\sqrt{س^3+2}}$.ءس			

س3 : أوجد مايلي :

1)	$\int (4س^2+5)^5(8س)$.ءس	
2)	$\int (2س-6)(س^2-6س+8)^6$.ءس	
3)	$\int \sqrt[4]{س^3+2س-5}\ (3س^2+2)$. ءس	

(3 -3) التكامل المحدود :

تعرفنا في الوحدة التدريبية السابقة على مفهوم التكامل غير المحدود و سنتناول في هذه الوحدة مفهوماً آخر لا يختلف كثيراً عن سابقه وهو التكامل المحدود و نعني بالتكامل المحدود تكامل دالة على فترة حقيقة.

فإذا كانت لدينا دالة د(س)ونريد ايجاد تكاملها على الفترة[ا ، ب] فإننا نرمز لهذا التكامل بالرمز:

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) . ءس حيث أ ، ب هما نهايتا التكامل.

و يقرأ هذا الرمز كالتالي تكامل د(س)من س=أ إلى س=ب ولحساب هذا التكامل فإننا نتبع الآتي:

1. نجري عملية التكامل كما في الوحدة السابقة دون كتابة الثابت ث.
2. نعوض عن س في الدالة الناتجة بالقيمة العليا(ب)ثم نعوض بالقيمة السفلى (أ)ثم نطرح القيمة العليا من السفلى ونرمز لهذه الخطوة بالرمز $[\,د(س)\,]_{أ}^{ب}$

أي أن :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) . ءس= $[\,د(س)\,]_{أ}^{ب}$ =د(ب)-د(أ)

مثال (13):أوجد مايلي:

1)	$\int_{1-}^{3} 4$. ءس						
2)	$\int_{1}^{2}$ س. ءس						
3)	$\int_{0}^{2} س^2$. ءس						

الحل:

1)	$\int_{-1}^{3}$	4. ءس	=	$[4\text{س}]_{-1}^{3}$	
			=	$[4(3)] - [4(-1)]$	
			=	$12-(-4)$	
			=	$12+4$	
			=	16	

2)	$\int_{1}^{2}$	س. ءس	=	$[\frac{\text{س}^2}{2}]_{1}^{2}$	
			=	$[\frac{(2)^2}{2}]-[\frac{(1)^2}{2}]$	
			=	$[\frac{4}{2}]-[\frac{1}{2}]$	
			=	$\frac{4-1}{2}$	
			=	$\frac{3}{2}$	

3)	$\int_{0}^{2}$	س^2. ءس	=	$[\frac{\text{س}^3}{3}]^{2}$
			=	$[\frac{(2)^3}{3}]-[\frac{(0)^3}{3}]$
			=	$\frac{8}{3}-0$
			=	$\frac{8}{3}$

مثال (14):أوجد التكامل الآتي:

	$\int_{1}^{3}$	(4س^3+2). ءس	

الحل:

3)	$\int_{1}^{3}$	(4س^3+2). ءس	=	$[\frac{4\text{س}^4}{4}+2\text{س}]_{1}^{3}$
			=	$[\text{س}^4+2\text{س}]_{1}^{3}$
			=	$[(3)^4+2(3)] - [(1)^4+2(1)]$

				=	$(81+6)-(1+2)$
				=	$87-3$
				=	84

مثال (15):أوجد قيمة التكامل الآتي:

$\int_{0}^{1} (6\text{س}^2+4\text{س}+11).\ \text{دس}$	

الحل:

3)	$\int_{0}^{1}$		$(6\text{س}^2+4\text{س}+11).\ \text{دس}$	=	$\left[\frac{6\text{س}^3}{3}+\frac{4\text{س}^2}{2}+11\text{س}\right]_0^1$
				=	$[2\text{س}^3+2\text{س}^2+11\text{س}]_0^1$
				=	$(2(1)^3+2(1)^2+11(1))-$ $(2(0)^3+2(0)^2+11(0))$
				=	$(2+2+11)-$صفر
				=	15

مثال(16):أوجد قيمة مايلي:

$\int_{0}^{3} (4\text{س}^2-2\text{س}+1).\ \text{دس}$	

الحل:

3)	$\int_{0}^{3}$		$(4\text{س}^2-2\text{س}+1).\ \text{دس}$	=	$\left[\frac{4\text{س}^3}{3}-\frac{2\text{س}^2}{2}+\text{س}\right]_0^3$
				=	$\left[\frac{4(3)^3}{3}-(3)^2+3\right]-\left[\frac{4(0)^3}{3}-(0)^2+0\right]$
				=	$(36-9+3)-$صفر
				=	30

مثال (17): أوجد قيمة:

$$\int_{2}^{4} \frac{س^{2}-64}{س-8} \,.\, \text{ءس}$$

الحل:

3)

$$\int_{2}^{4} \frac{س^{2}-64}{س-8} \,.\, \text{ءس} = \int_{2}^{4} \frac{(س+8)(س-8)}{(س-8)} \,.\, \text{ءس}$$

$$= \int_{2}^{4} (س+8) \,.\, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{س^{2}}{2} + 8س\right]_{2}^{4}$$

$$= \left[\frac{(4)^{2}}{2} + 8(4)\right] - \left[\frac{(2)^{2}}{2} + 8(2)\right]$$

$$= (32+8) - (16+2)$$

$$= 40 - 18$$

$$= 22$$

مثال (18): أوجد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_{1}^{3} \frac{س^{2}-9}{س-3} \,.\, \text{ءس}$$

الحل:

3)

$$\int_{1}^{3} \frac{س^{2}-9}{س-3} \,.\, \text{ءس} = \int_{1}^{3} \frac{(س+3)(س-3)}{(س-3)} \,.\, \text{ءس}$$

$$= \int_{1}^{3} (س+3) \,.\, \text{ءس}$$

$$= \left[\frac{س^{2}}{2} + 3س\right]_{1}^{3}$$

$$= \left[\frac{(3)^{2}}{2} + 3(3)\right] - \left[\frac{(1)^{2}}{2} + 3(1)\right]$$

$$= \left(\frac{9}{2}+9\right) - \left(\frac{1}{2}+3\right)$$

$$= 13.5 - 3.5$$

$$= 10$$

تدريب (3):

1)	أوجـــد التكامـــل الآتـــي:	$\int_{0}^{2} (4س^3+3س^2+6س+2).\ ءس$
2)	أحسب قيمة التكامل الآتي:	$\int_{-3}^{3} \frac{س^2-25}{س-5}.\ ءس$

تمارين (3-3)

س1:	أوجـــد التكامـــل الآتـــي:	$\int_{2}^{3} ((4س^3+2).\ ءس$

س2:	احســــــب قيمــــــــة:	$\int_{1}^{2} (3س^2+2س).\ ءس$

س3:	أوجـد قيمـة التكامل الآتي:	$\int_{-2}^{2} \frac{س^2-4}{س-2}.\ ءس$

س4:	أوجـــد التكامـــل الآتـــي:	$\int_{-2}^{4} (6س^2+8س+2).\ ءس$

س5:	أوجـد قيمـةالتكامل الآتـي:	$\int_{0}^{3} \frac{س^2-100}{س-10}.\ ءس$

المملكة العربية السعودية

المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني

الإدارة العامة لتصميم وتطوير المناهج

رياضيات

تطبيقات حساب التكامل

تطبيقات حساب التكامل

4

الجدارة:

آن يكون قادراً على معرفة نظرية القيمة المتوسطة للتكامل وإيجاد مساحة المناطق المستوية و حجوم الأجسام الدورانية.

الأهداف:

عندما تكمل هذه الوحدة تكون قادراً على :

1. معرفة نظرية القيمة المتوسطة للتكامل.
2. إيجاد مساحة بعض المناطق المستوية.
3. إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

مستوى الأداء المطلوب:

أن يصل المتدرب إلى الإتقان الكامل لحساب مساحة المناطق المستوية وحجوم الأجسام الدورانية بنسبة 100٪ وأن لا تقل نسبة معرفته لنظرية القيمة المتوسطة للتكامل عن 90٪ .

الوقت المتوقع للتدريب:

6 ساعات

الوسائل المساعدة:

1. استخدام التعليمات في هذه الوحدة.
2. سوف نحتاج إلى الرجوع إلى معلوماتك السابقة في الوحدة الثالثة.

متطلبات الجدارة:

طالما أنة لا يوجد شيء قبل هذه الوحدة يجب التدريب على جميع المهارات فيها.

تطبيقات حساب التكامل

(4 - 1) نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

نظرية: إذا كانت د دالة متصلة في [أ ، ب] فإنه يوجد نقطة $\text{س}_0 \in$ [أ ، ب] بحيث: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)} \,.\, \text{ءس} = (\text{ب} - \text{أ}) \,.\, \text{د}(\text{س}_0)$

مثال(1): أوجد قيمة العدد س_0 الذي تحققه نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$\int_{1}^{4} (4\text{س} - 3) \,.\, \text{ءس}$

الحل:

لنعتبر الدالة د(س)=4س-3 فتكون متصلة في الفترة [4،1] لأنها كثيرة حدود وبالتالي تبعاً لنظرية القيمة المتوسطة للتكامل فإنه يوجد س. ∍ [4،1] بحيث.

$\int_{1}^{4} (4\text{س} - 3) \,.\, \text{ءس}$	=	$(4-1) \,.\, \text{د(س)}$
$\int_{1}^{4} (4\text{س} - 3) \,.\, \text{ءس}$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$\left[\frac{4\text{س}^2}{2} - 3\text{س}\right]_1^4$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$\left[2\text{س}^2 - 3\text{س}\right]_1^4$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$[2(4)^2 - 3(4)] - [2(1)^2 - 3(1)]$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$(32-12) - (2-3)$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$(20) - (-1)$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$20 + 1$	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
21	=	$3 \,.\, \text{د(س)}$
$\therefore \text{د(س)}$	=	$\frac{21}{3}$
د(س)	=	7
$4\text{س} - 3$	=	7
4س	=	$7+3$
4س	=	10
س	=	$\frac{10}{4}$

س	=	2.5
2.5 ∋ [1،4]		

مثال(2):أوجد قيمة العدد س$_0$ الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$\int_{2}^{5}$ (4س-5) . ءس

الحل:

الدالة د(س)=4س-5 دالة متصلة في [2،5] لأنها كثيرة حدود ومنه فإنه يوجد س$_0$∋[2،5] بحيث:

$\int_{2}^{5}$ (4س-5) . ءس	=	(5 - 2).د(س)
[$\frac{4س^2}{2}$ - 5س]$_2^5$	=	3.د(س)
[2س^2 - 5س]$_2^5$	=	3.د(س)
[2(5)^2-5(5)] - [2(2)^2-5(2)]	=	3.د(س)
(50-25)-(8-10)	=	3.د(س)
(25)-(-2)	=	3.د(س)
25+2	=	3.د(س)
27	=	3.د(س)
∴د(س)	=	9
4س-5	=	9
4س	=	9+5
4س	=	14
4س	=	$\frac{14}{4}$
س	=	3.5

تدريب (1):أوجد قيمة العدد س0 الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$\int_{0}^{3}$ (2س-3) . ءس

تمارين(4-1)

س1 : أوجد قيمة العدد س_0 الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_{1}^{4} (\text{س}^{2}) \ . \ \text{ءس}$$

س2 : أوجد قيمة العدد س_0 الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_{0}^{4} (\text{س}^{2} - 3) \ . \ \text{ءس}$$

س3 : أوجد قيمة العدد س_0 الذي يحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

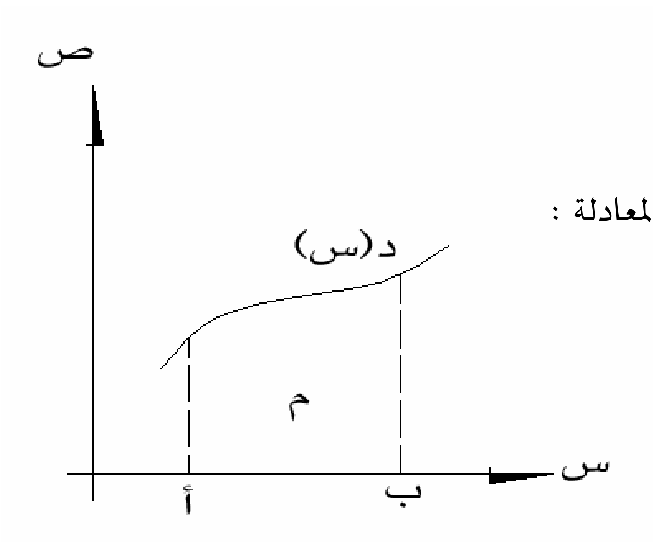
$$\int_{0}^{3} (\text{س}^{2} - 2\text{س} + 3) \ . \ \text{ءس}$$

(4 - 2) مساحة بعض المناطق المستوية :

لتكن د(س) دالة معرفة على الفترة [أ ، ب] فإنه :

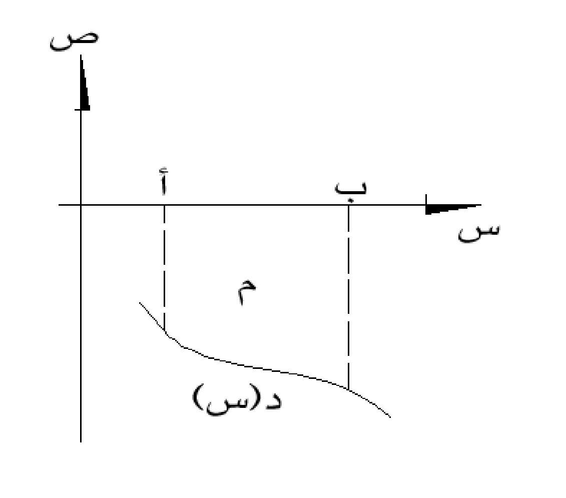
1. إذا كانت د(س) غير سالبة في [أ ، ب] فإن

مساحة المنطقة تحت د(س) وفوق [أ ، ب] تعطي بالمعادلة :



$$م = \int_{أ}^{ب} د(س)\ .\ ءس$$

2. إذا كانت د(س) غير موجبة في [أ ، ب] فإن مساحة المنطقة فوق د(س) و تحت [أ ، ب] تعطى بالمعادلة:

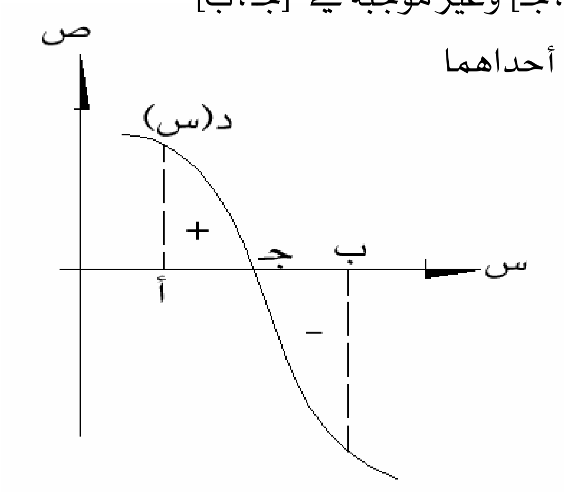


$$م = - \int_{أ}^{ب} د(س)\ .\ ءس$$

ملاحظة :

توضع إشارة (-) لأن $\int$ د(س) . ءس يصبح عدداً سالباً إذا كانت د(س)< 0 لكل س∈ [أ ، ب]
فينبغي أن نغير إشارته إذا أردنا أن تكون المساحة م عدداً غير سالب كما هو المعتاد

3. إذا كانت جـ ∋ [أ ،ب] وكانت د(س)غير سالبة في [أ ،جـ] وغير موجبة في [جـ ،ب] فإن مساحة المنطقة الناتجة من اتحاد المنطقتين اللتين تقع أحداهما تحت د(س) وفوق [أ ،جـ] والآخرى فوق د(س) وتحت[جـ ،ب]تعطي بالمعادلة :



$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,.\text{ءس} - \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,.\text{ءس}$$

وبصفه عامة فإن المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ص=د(س) والمحور السيني والمستقيم س=أ ، س=ب هي:

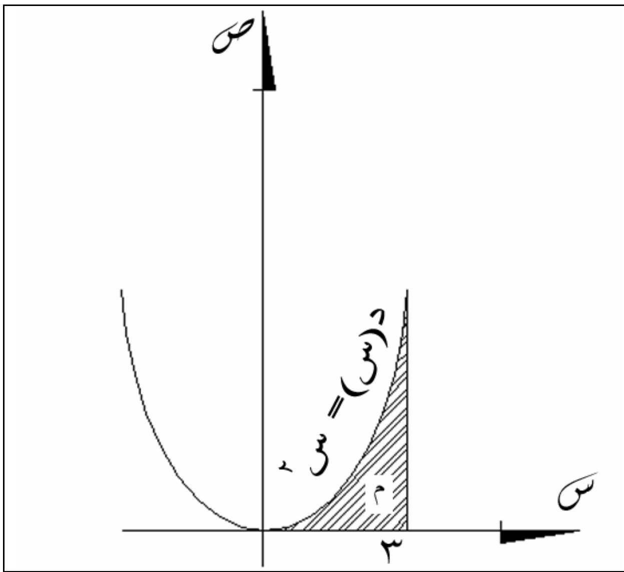
$$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,.\text{ءس}$$

مثال(3):

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى :د(س)=س^{2} والمحور السيني والمستقيمين: س=0 ،س=3

الحل:

د(س)متصلة وغير سالبة في [أ ،ب] وبالتالي فهي قابلة للتكامل على[أ ،ب]



$$\therefore \text{م} = \int_{0}^{3} \text{س}^{2}\,.\text{ءس}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}\text{س}^{3}\right]_{0}^{3}$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}(3)^{3}\right] - \left[\tfrac{1}{3}(0)^{3}\right]$$

$$= 9-0$$

= 9 وحدات مربعة

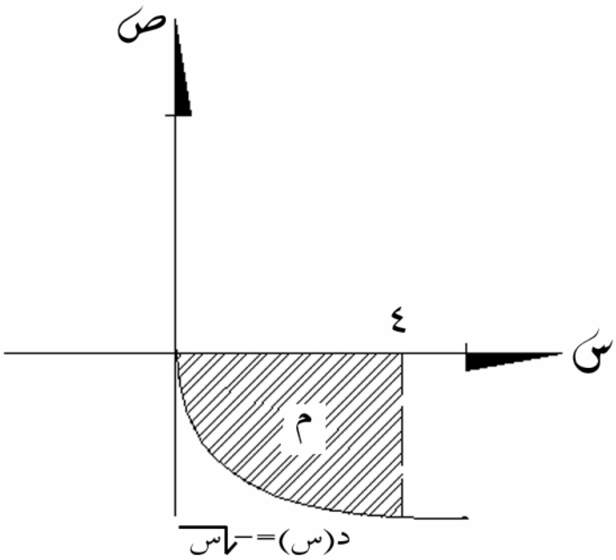
مثال(4): احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $د(س) = -\sqrt{س}$ والمستقيمين $س=0$ ، $س=4$ والمحور السيني.

الحل:

الدالة د(س) غير موجبة في الفترة [0 ، 4].

∴ المساحة المحدودة بالمستقيمين $س=0$ ، $س=4$ وتحت محور السينات هي:

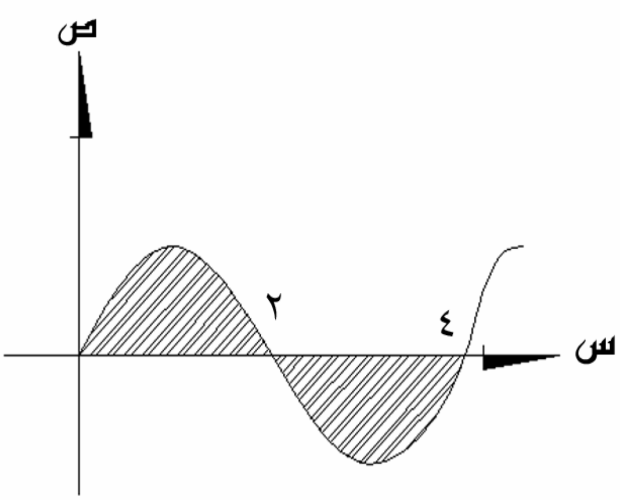
م	$=-$	$\int_0^4 -\sqrt{س}\,.\,دس$
	$=$	$\left[\frac{2س^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^4$
	$=$	$\left[\frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] - \left[\frac{2(0)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$
	$=$	$\left(\frac{16}{3}\right)$ - صفر
	$=$	$\frac{16}{3}$ وحدة مربعة



مثال (5): أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $د(س)=س^3-6س^2+8س$ والمستقيمين:
$س=0$ ، $س=4$

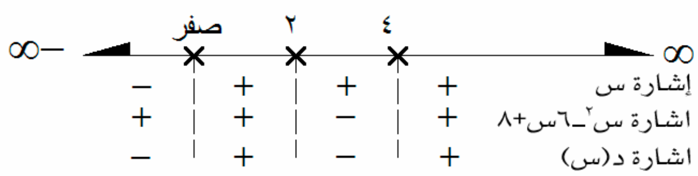
الحل:

د(س)	=	0
$س(س^2-6س+8)$	=	0
$س(س-2)(س-4)$	=	0
$س=0$ أو $س=2$ أو $س=4$		



لاحظ أن إشارة د(س)عبارة عن:

إشارة س مضروبة بإشارة (س^2-6س+8) ونبحث إشارة د(س) على خط الأعداد كما يلي:



د(س)≤ 0 لكل س ∋ [0 ، 2] يعني أن:

	م$_1$	=	$\int_{0}^{2}$ (س^3-6س^2+8س). ءس
		=	[$\frac{1}{4}$س^{4}ـ2س^3+4س^2]$_0^2$
		=	4

د(س)≥ 0 لكل س ∋ [2 ، 4] يعني أن:

	م$_2$	-=	$\int_{2}^{4}$ (س^3-6س^2+8س). ءس
		-=	[$\frac{1}{4}$س^{4}ـ2س^3+4س^2]$_2^4$
		=	4

من م$_1$ و م$_2$ ينتج المساحة المطلوبة هي:

م=م$_1$+م$_2$=4+4=8 وحدات مربعه .

تدريب (2):

1. أوجد المساحة الواقعة أسفل المنحنى د(س)=س^2+4 والمحصورة بين المستقيمين: س=-1 ، س=2
2. احسب مساحة المنطقة المحصورة بالدوال الآتية:

د(س)=- $\sqrt{س^3}$ ،س=0 ، س=2 والمحور السيني

تمارين (4-2)

س1 : أوجد مساحة المنطقة المحدودة بين منحنى الدالة :د(س)=س^2-4س+5 والمستقيمين س=1 ، س=3 ومحور السينات.

س2 : أوجد المساحة الواقعة أسفل المنحنى:

د(س)=س^3 ومحور السينات والمستقيمين س=0 ، س=2 .

س3 : أوجد المساحة المحصورة بين :

منحنى الدالة د(س)=- س^2 والمستقيمين س=0 ، س=3 والمحور السيني.

س4 : أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة :

د(س)=س^2 والمستقيمين س=-2 ، س=2 والمحور السيني .

س5 : أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى:

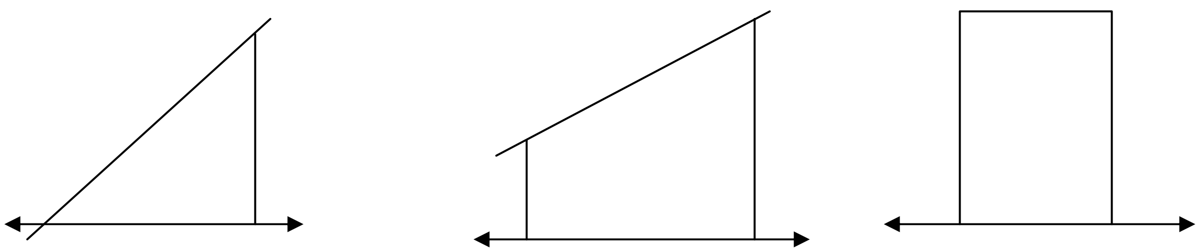
د(س)=س^2+2س-3 والمحور السيني والمستقيمين : س=-3 ، س=1

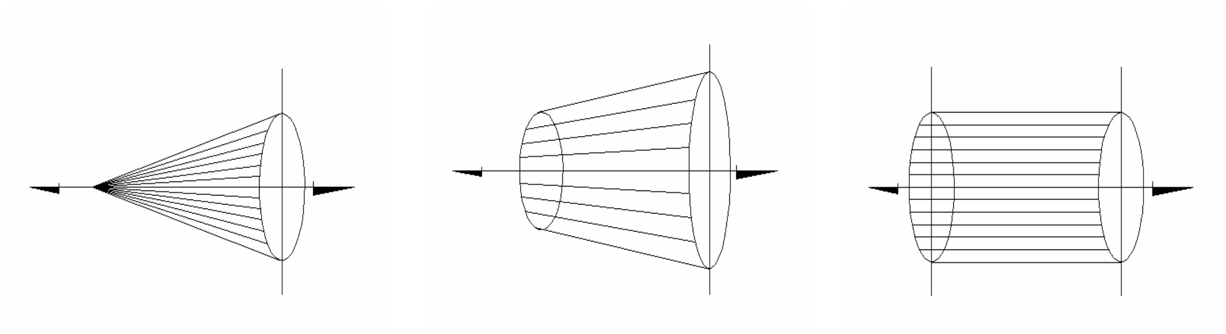
س6 : أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى:

د(س)=2س+3 و المستقيمين س=-1 ، س=3 ومحور السينات.

(4 - 3) حجوم الأجسام الدورانية :

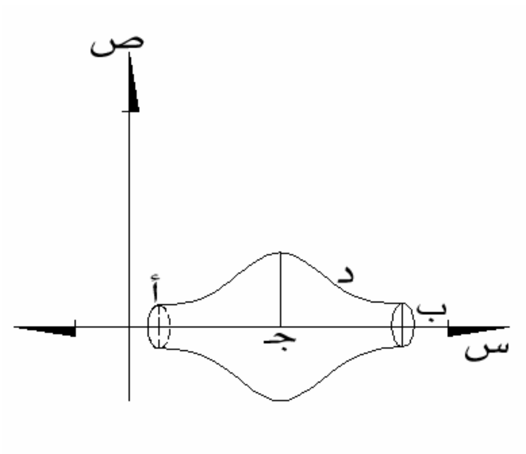
إذا دارت منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها فإن الجسم الناشئ من الدوران يسمى جسماً دورانياً ، ويسمى المستقيم الثابت محور الدوران والرسوم التالية تبين بعض الأجسام الدورانية وفيما يلي سنقدم طريقة حساب حجوم الأجسام الدورانية بواسطة التكامل المحدود :





حجم الجسم الدوراني :

لتكن د(س) دالة متصلة وغير سالبة في [أ ، ب] كما في الشكل أدناه ، نفرض أن المنطقة الواقعة تحت د(س) و فوق [أ ، ب] قد دارت دورة كاملة حول محور السينات ، فولدت جسماً دورانياً محدداً من الطرفين أ ، ب بدائرتين عمودتين على المحور السيني . إذا كان ح يساوي الحجم الحاصل من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) و محور السينات والمستقيمين س=أ ، س=ب دورة كاملة حول المحور السيني فإن هذا الحجم يعطي بالقانون :



$$\text{ح} = \text{ط} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)}]^2 \,.\, \text{ءس}$$

مثال (6) : أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران لمنحنى : د(س)=3 -س و المستقيمين: س=0 ، س=3 دورة كاملة حول المحور السيني؟

الحل:

$$\text{ح} = \text{ط} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)}]^2 \,.\, \text{ءس}$$

$$\text{ح} = \text{ط} \int_{0}^{3} (3-\text{س})^2 \,.\, \text{ءس}$$

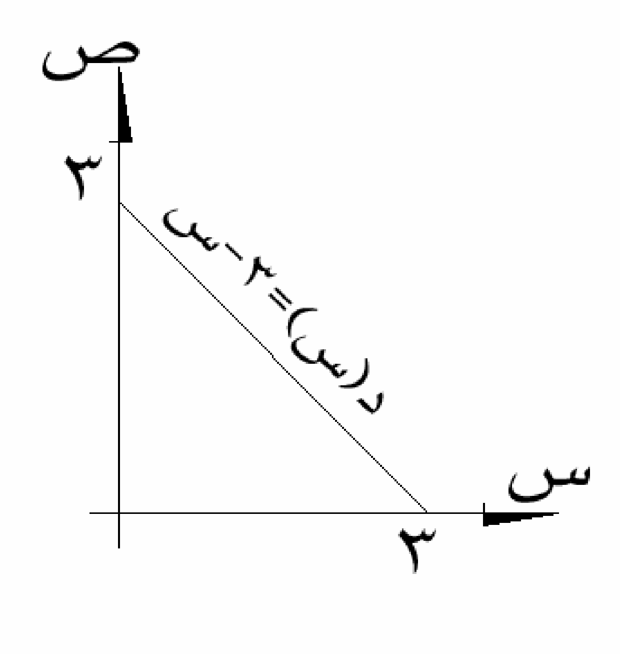
$$\text{ح} = \text{ط} \int_{0}^{3} (9-6\text{س}+\text{س}^2) \,.\, \text{ءس}$$

$$= \text{ط} \left[9\text{س} - 3\text{س}^2 + \frac{\text{س}^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \text{ط} \left(\left[9(3) - 3(3)^2 + \frac{(3)^3}{3}\right] - \left[9(0) - 3(0)^2 + \frac{(0)^3}{3}\right] \right)$$

$$= \text{ط} \left([27-27+9] - [\text{صفر}] \right)$$

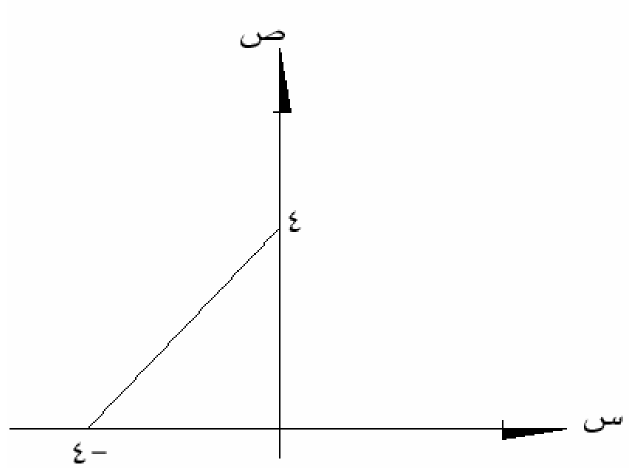
$$= 9\text{ط وحدة مكعبة}$$



مثال(7):أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بمنحنيات الدوال والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول السيني :د(س)=س+4 ، س=0 ، س=2

الحل:

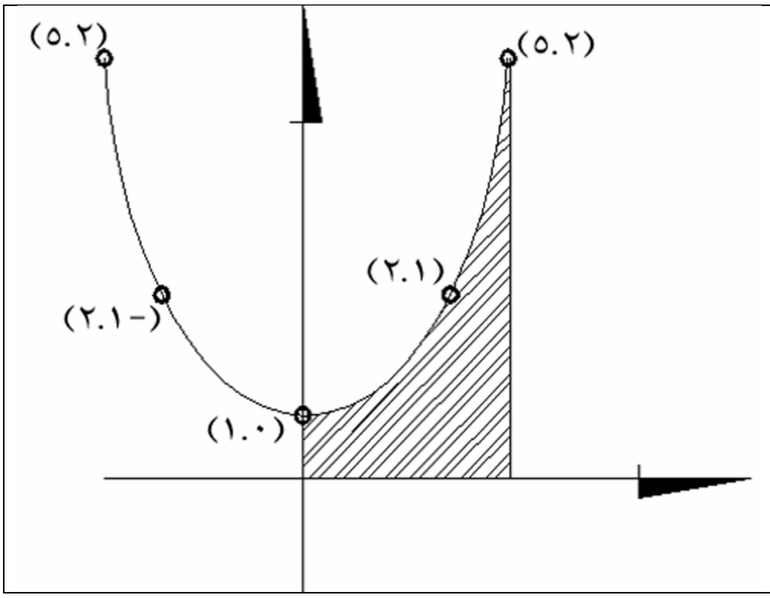
$ح = ط \int_{أ}^{ب} [د(س)]^2 \,.\, ءس$
$ح = ط \int_{0}^{2} (س+4)^2 \,.\, ءس$
$ح = ط \int_{0}^{3} (س^2+8س+16) \,.\, ءس$
$= ط \left[\frac{س^3}{3} + 4س^2 + 16س \right]_{0}^{2}$
$= ط \left(\left[\frac{(2)^3}{3} + 4(2)^2 + 16(2) \right] - [صفر] \right)$
$= ط \left(\frac{8}{3} + 16 + 32 \right)$
$= \frac{152}{3}$ ط وحدة مكعبة



مثال (8): أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنحنى : د(س)=س2+1 والمستقيمين : س=0، س=2 دورة كاملة حول المحور السيني.

الحل:

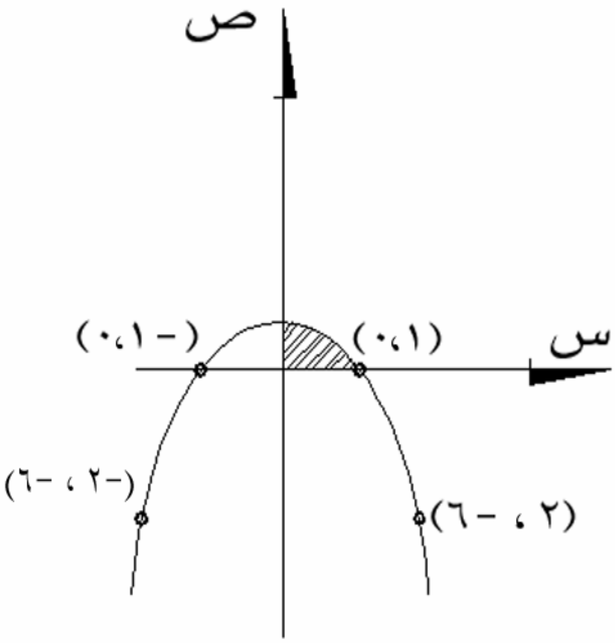
$ح = ط \int_{0}^{2} (س^2+1)^2 \,.\, ءس$
$ح = ط \int_{0}^{2} (س^4+2س^2+1) \,.\, ءس$
$= ط \left[\frac{س^5}{5} + \frac{2س^3}{3} + س \right]_{0}^{2}$
$= ط \left(\left[\frac{(2)^5}{5} + \frac{2(2)^3}{3} + 2 \right] - [صفر] \right)$
$= ط \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right)$
$= \frac{206}{15}$ ط وحدة مكعبة



مثال(9): أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنحنى :د(س)=س-س^3 والمستقيمين س=0 ، س=1 حول المحور السيني:

الحل:

ح	=	ط	$\int_{0}^{1}$ (س^6-2س^4+س^2) . ءس
	=	ط	$\left[\frac{س^7}{7} - \frac{2س^5}{5} + \frac{س^3}{3}\right]_0^1$
	=	ط	$\left(\left[\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right] - [صفر]\right)$
	=	ط	$\left[\frac{15-42+35}{105}\right]$
	=		$\frac{8ط}{105}$ وحدة مكعبة



تدريب(3):

1. أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنحنى :د(س)=2س-س^2 والمستقيمين س=0 ، س=2 دورة كاملة حول المحور السيني.
2. أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنحنى :د(س)= س^2 والمستقيمين د(س)=4 حول المحور السيني دورة كاملة.

تمارين (3-4)

س1 : أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنحنى :د(س)=2+س^2 والمستقيم د(س)=4 دورة كاملة حول المحور السيني؟

س2 : أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنحنى :د(س)=4-س^2 والمستقيم س=-2 ، س=2 حول المحور السيني دورة كاملة ؟

س3 : أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنحنى :د(س)=2 -س والمستقيم س=0 ، س=2 دورة كاملة حول المحور السيني؟

س4 : أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين :د(س)= س^2 ، د(س)=س+2 ، والمستقيمين : س= -1 ، س=2 دورة كاملة حول المحور السيني؟

س5 : أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة :د(س)= س-1 والمستقيمين : س=2 ، س=3 دورة كاملة حول المحور السيني؟

س6 : أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنحنى :د(س)=2س+3 والمستقيم : س=0 س=3 دورة كاملة حول المحور السينات؟

المراجع

1. أساسيات التفاضل والتكامل ، خالد قاسم سمور.

2. أساسيات الرياضيات حساب التفاضل والتكامل ، د.فوزي محمد عون.

3. تبسيط الرياضيات للطلاب ، أ/محمد سعد المقري.

4. تطبيقات في حساب التفاضل والتكامل ،د.ابراهيم ديب سرميني، د.سلمان عبدالرحمن السلمان.

5. حساب التفاضل و التكامل الجزء الأول والثاني ، د.محمد عادل سودان، د.سلمان السلمان ، د.ابراهيم سرميني.

6. حساب التفاضل و التكامل ، د.محمد عادل سودان ، د.علي عبدالله الدفاع.

7. حساب التفاضل و التكامل ،الجزء الأول والثاني ،د.طه مرسي العددي، د.محمد زيدان عبدالله ، د.عبدالله بن علي الخريجي.

8. الرياضيات ،د.زياد القاضي ، د.مصطفى أبوسويلم وآخرون.

9. الرياضيات للصف الثالث ثانوي ،د.سلمان السلمان ،د.محمد القويز وآخرون.

10. مبادئ التفاضل والتكامل الجزء الأول ،د.صالح السنوسي ، د. معروف سمحان د.كمال الهادي عبدالرحمن ،د.يوسف الخميس.

11. calculus with analytic geometry , Earl w.swokowski

المحتويات

تقدر المؤسسة العامة للتعليم الفني والتدريب المهني الدعم

المالي المقدم من شركة بي آيه إي سيستمز (العمليات) المحدودة

GOTEVOT appreciates the financial support provided by BAE SYSTEMS

BAE SYSTEMS